



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-12257-TDI/982**

**ESTUDO DE UM MÉTODO PARA CÁLCULO DE GANHOS DA  
MALHA DE CONTROLE DE ATITUDE DE UM  
LANÇADOR DE SATÉLITES**

Daniel Carmona de Campos

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle –ETE/CMC, orientada pelo Dr. Waldemar de Castro Leite Filho, aprovada em 05 de abril de 2004.

629.7.062.2

CAMPOS, D. C.

Estudo de um método para cálculo de ganhos da malha de controle de atitude de um lançador de satélites /

D. C. Campos. – São José dos Campos: INPE, 2004.

160p. – (INPE-12257-TDI/982).

1. Controle de atitude. 2. Controle automático de vôo.  
3. Veículos lançadores. 4. Lançamento de espaçonaves.  
5. Sistema de controle SISO. 6. Regulador quadrático linear.  
7. Sistemas não-lineares. I. Título.

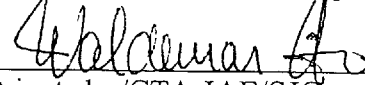
Aprovado(a) pela Banca Examinadora em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do Título de **Mestre em Engenharia e Tecnologia Espaciais/ Mecânica Espacial e Controle**

Dr. Valdemir Carrara



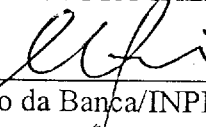
Presidente/INPE, SJCampos-SP

Dr. Waldemar de Castro Leite Filho



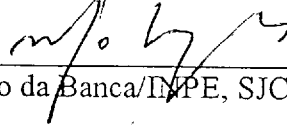
Orientador/CTA-IAE/SJCampos-SP

Dr. Mário César Ricci



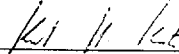
Membro da Banca/INPE, SJCampos-SP

Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza



Membro da Banca/INPE, SJCampos-SP

Dr. Karl Heinz Kienitz



Membro da Banca/Convidado-ITA/SJCampos-SP

**Aluno(a): Daniel Carmona de Campos**



*“ A verdade está lá fora ”*

*Fox Mulder*

*“ O fim do jogo é o início do jogo ”*

*Sepp Herberger*



*Dedico esta dissertação à minha amada esposa  
Silvana e à minha querida filha Mariana pela  
paciência e apoio na realização deste trabalho.*





## **AGRADECIMENTOS**

- ao Professor Waldemar de Castro Leite Filho pela paciência na orientação deste trabalho e ensinamentos técnicos e morais;
- aos profissionais do IAE pelo apoio e ajuda, especialmente ao Fausto pelo suporte técnico, informativo e moral;
- aos meus colegas de mestrado pelo companheirismo e suporte;
- à minha esposa Silvana pelo apoio nesta longa caminhada, me ajudando a relaxar ao longo do caminho. Agradeço a ela e a minha filha Mariana pela paciência durante a elaboração deste trabalho e pelas horas ausentes em suas vidas;
- à secretária Márcia Alvarenga dos Santos do curso ETE/CMC no INPE pela ajuda na resolução dos problemas administrativos;
- ao Professor Bertachini do curso ETE/CMC pelo suporte às minhas diversas dúvidas e problemas (administrativos e prazos) com relação ao curso de mestrado;
- ao INPE pela oportunidade de estudo e aprendizado;
- à EMBRAER pelas horas liberadas para o mestrado;
- a todas pessoas que me estimularam e ajudaram no desenvolvimento deste trabalho e que porventura não foram mencionadas.



## RESUMO

Neste trabalho, os ganhos do controlador do VLS são calculados aplicando-se a técnica de pólos congelados em intervalos de 1 segundo de vôo, permitindo que uma análise linear invariante seja adotada para cada intervalo de tempo ao longo de todas as fases de vôo. Como a arquitetura de controle adotada é fixa (PID), os valores dos ganhos devem ser escalonados ao longo do tempo (*gain scheduling*) para que o foguete cumpra os diversos requisitos de estabilidade e performance determinados para a missão. Utilizando-se uma metodologia LQ (Linear Quadrática), para um instante de tempo escolhido, obtêm-se um modelo de referência que é estendido para todos os instantes de vôo. Porém, através dos 3 ganhos do controlador (eixo de arfagem) não é possível em cada instante de vôo se fixar todos os parâmetros do modelo, fazendo com que este varie em relação ao modelo de referência e degradando o controle de atitude em relação ao instante onde o funcional foi minimizado. Além disso, a escolha das matrizes de ponderação é extremamente empírica, tendo pouco significado físico e relação com a resposta no tempo. Neste trabalho, utiliza-se um método analítico para determinação dos ganhos da malha de controle de atitude. Esta técnica visa definir os requisitos de resposta no tempo, a saber, tempo de subida, tempo de assentamento e máximo erro à entrada rampa. Desta maneira fixam-se as características da resposta no tempo, permitindo com que os pólos e zeros variem dentro de uma certa faixa (respeitando assim a “natureza” variável do sistema). Este método mostra-se promissor quando comparado com o método já implementado, pois permite uma relação mais direta entre os parâmetros de ajuste e a resposta no tempo, além de maiores margens de fase e ganho.



## **ANALYTICAL METHOD FOR COMPUTING THE CONTROLLER GAINS OF A SATELLITE LAUNCHER**

### **ABSTRACT**

In this work, the VLS (Satellite Launcher Vehicle) control gains are calculated applying a frozen poles technique for each 1-second interval, allowing that a linear time invariant analysis to be executed inside each time interval during all flight phases. The system control architecture is proportional-integral with derivative feedback, making the 3 gains (pitch axis) to be scheduled with time so that the launcher can achieve the performance and stability requirements for the mission. A LQ (Linear Quadratic) methodology is applied for a chosen time instant, achieving a reference model that is adopted for all instants. However, making use of the 3 controller gains, it is not possible in each time to freeze all parameters of the model. This way, the controlled model varies during the flight and degenerates the attitude control in comparison with the reference model. Also, the specification of the weighting matrixes is an extremely empirical procedure, has poor physical meaning and relation with the time response. In this work, an analytic method is used for the determination of the gains, establishing the time response parameters: rising time, settling time and maximum ramp error. This way, the poles and zeros are free to move (respecting the variable "nature" of this system), regarding only the time requirements. This method appears to be better than the LQ method already in use, since it allows a corresponding between the adjustable parameters and the time response and has larger phase and gain margins.



# SUMÁRIO

Pág.

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE TABELAS

## LISTA DE SÍMBOLOS

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

<b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>31</b>
1.1 Conceitos Básicos .....	31
1.2 Objetivo e Motivação .....	34
1.3 Organização .....	35
<b>CAPÍTULO 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>37</b>
<b>CAPÍTULO 3 DINÂMICA DE UM LANÇADOR RÍGIDO</b> .....	<b>41</b>
3.1 Definição da Base Inercial e Bases Móveis .....	41
3.2 Equacionamento da Dinâmica de um Lançador de Satélites .....	48
3.2.1 Equações Translacionais .....	49
3.2.1.1 Força de Empuxo .....	54
3.2.1.2 Força Peso .....	56
3.2.1.3 Força Aerodinâmica .....	59
3.2.1.4 Equações de Movimento Linear .....	61
3.2.2 Equações Rotacionais .....	63
3.2.2.1 Momento Aerodinâmico $\overline{MA}$ .....	65
3.2.2.2 Momento de Amortecimento Aerodinâmico $\overline{MAA}$ .....	66
3.2.2.3 Torque de Controle $\overline{TC}$ .....	68

3.2.2.4	Momento de Amortecimento de Jato $\overrightarrow{MAJ}$ .....	69
3.2.2.5	Equações de Movimento Angular .....	69
3.3	Função de Transferência .....	72
<b>CAPÍTULO 4 METODOLOGIA .....</b>		<b>79</b>
4.1	Arquitetura de Controle .....	79
4.2	Métodos de Cálculos dos Ganhos da Malha de Controle .....	83
4.2.1	Método LQ ( <i>Linear Quadratic</i> ) .....	83
4.2.2	Método Analítico .....	86
<b>CAPÍTULO 5 RESULTADOS .....</b>		<b>95</b>
5.1	Dados do Veículo Lançador de Satélites (VLS) .....	95
5.1.1	Dados Aerodinâmicos e de Flexão .....	96
5.1.2	Modelo Completo .....	102
5.2	Resultados do VLS .....	105
5.2.1	Método LQ .....	106
5.2.1.1	Dados do VLS para o Método LQ .....	106
5.2.1.2	Resposta do Método LQ (Modelo Simplificado) .....	107
5.2.1.3	Resposta do Método LQ (Modelo Completo) .....	109
5.2.2	Método Analítico .....	114
5.2.2.1	Dados do VLS para o Método Analítico .....	114
5.2.2.2	Resposta do Método Analítico (Modelo Simplificado) .....	115
5.2.2.3	Resposta do Método Analítico (Modelo Completo) .....	132
5.2.3	Estudo Especial: Filtro <i>Notch</i> .....	134
5.2.4	Comparação dos Métodos .....	146
<b>CAPÍTULO 6 CONCLUSÕES .....</b>		<b>149</b>



<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>153</b>
<b>APÊNDICE A - TABELAS</b> .....	<b>157</b>



## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
1.1: Foguete com estabilidade natural.....	32
3.1: Sistema SYS1.....	43
3.2: Sistema SYS2.....	44
3.3: Sistema SYS3.....	45
3.4: Sistema SYS4.....	45
3.5: Sistema SYS5.....	46
3.6: Rotação do triedro inercial ( $X_3 Y_3 Z_3$ ou XYZ) para corpo ( $X_5 Y_5 Z_5$ ou xyz) utilizando ângulos de Euler. ....	47
3.7: Velocidades lineares ( $u, v, w$ ), projeções da velocidade linear $\vec{v}_b^r$ nos eixos do sistema corpo. ....	49
3.8: Velocidades angulares ( $p, q, r$ ), projeções da velocidade angular $\vec{\Omega}_b^{b/r}$ nos eixos do sistema corpo. Os momentos $L, M, N$ também são mostrados. ....	51
3.9: Forças atuantes no veículo.....	53
3.10: Força de empuxo no triedro do corpo.....	54
3.11: Sistema massa-mola-amortecedor.....	58
3.12: Ângulos aerodinâmicos.....	59
3.13: Braço de alavanca da força aerodinâmica ( $l_a$ ) e de controle ( $l_c$ ).....	66
3.14: Perfil de velocidade típico de um lançador, visto do inercial no plano de manobra.....	73
4.1: Modelo +simplificado com controle PI e realimentação velocidade. ....	79
4.2: Trajetória do CG (qualitativa) em relação ao inercial, vista em perspectiva e no plano de manobra.....	80

4.3:	Perfil de atitude ao longo do tempo (qualitativo). .....	81
4.4:	Três formas da Equação (4.1). .....	87
5.1:	Coeficientes de aceleração e outros parâmetros ao longo do vôo do VLS (continua). .....	97
5.2:	Pólos e zeros do modelo simplificado de corpo rígido (malha aberta), de 0 a 70 seg. de 5 em 5 seg (zoom, diversas escalas) (continua). .....	99
5.3:	Lugar das raízes para o modelo simplificado controlado, semelhante à FIGURA 4.1 (instante 20 seg. de vôo com $K_i = 0,82$ e $K_d = 1,0$ ). .....	100
5.4:	Lugar das raízes para o modelo +simplificado controlado, como na FIGURA 4.1 (instante 20 seg. de vôo com $K_i = 0,82$ e $K_d = 1,0$ ). .....	101
5.5:	Modelo Completo. ....	102
5.6:	Tubeira móvel (modelo linear), mostrando realimentação interna. ....	104
5.7:	Modelo utilizado para cálculo das margens de fase e ganho, obtido à partir do modelo completo (FIGURA 5.5). .....	105
5.8:	Ganhos do controlador (método LQ) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado). .....	107
5.9:	Resposta ao degrau unitário (método LQ, modelo simplificado). ....	108
5.10:	Ganhos do controlador (método LQ). .....	109
5.11:	Parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo completo). .....	110
5.12:	Outros parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo completo) e margem de fase e ganho. ....	111
5.13:	Resposta ao degrau unitário para o instante 25 seg. de vôo com modelo completo e simplificado, ganhos do método LQ. ....	112

5.14: Resposta ao degrau unitário para o instante 43 seg. de vôo com modelo completo e simplificado, ganhos do método LQ. ....	112
5.15: Resposta ao degrau unitário para o instante 58 seg. de vôo com modelo completo e simplificado, ganhos do método LQ. ....	113
5.16: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com $K_i _{M_{\alpha \max}} = 0,35; p_0 = 0,2$ .....	115
5.17: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com $K_i _{M_{\alpha \max}} = 0,50; p_0 = 0,2$ .....	116
5.18: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com $K_i _{M_{\alpha \max}} = 0,70; p_0 = 0,2$ .....	117
5.19: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com $K_i _{M_{\alpha \max}} = 0,35; p_0 = 0,3$ .....	118
5.20: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com $K_i _{M_{\alpha \max}} = 0,35; p_0 = 0,5$ .....	119
5.21: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com $K_i _{M_{\alpha \max}} = 0,70; p_0 = 0,3$ .....	120
5.22: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com $K_i _{M_{\alpha \max}} = 0,70; p_0 = 0,4$ .....	121

5.23: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com $K_i _{M_{\alpha \max}} = 0,70; p_0 = 0,5$ .....	122
5.24: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com $K_i _{M_{\alpha \max}} = 0,50; p_0 = 0,3$ .....	123
5.25: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com $K_i _{M_{\alpha \max}} = 0,50; p_0 = 0,4$ .....	124
5.26: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com $K_i _{M_{\alpha \max}} = 0,50; p_0 = 0,5$ .....	125
5.27: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com $K_i _{M_{\alpha \max}} = 0,40; p_0 = 0,3$ .....	126
5.28: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com $K_i _{M_{\alpha \max}} = 0,40; p_0 = 0,4$ .....	127
5.29: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com $K_i _{M_{\alpha \max}} = 0,40; p_0 = 0,5$ .....	128
5.30: Resposta ao degrau unitário (método Analítico, modelo simplificado).....	131
5.31: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo completo).....	132

5.32: Outros parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo completo) e margem de fase e ganho. ....	133
5.33: Modelo completo com filtro <i>Notch</i> reposicionado no canal direto. ....	134
5.34: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo completo com filtro <i>Notch</i> no canal direto). ....	135
5.35: Outros parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo completo com filtro <i>Notch</i> no canal direto) e margem de fase e ganho. ....	136
5.36: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário, comparando a resposta do modelo simplificado com o modelo completo com filtro <i>Notch</i> à 40 rad/s no canal direto. ....	137
5.37: Outros parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo completo com filtro <i>Notch</i> à 40 rad/s no canal direto) e margem de fase e ganho. ....	138
5.38: Lugar das raízes (zoom) do modelo completo (filtro <i>Notch</i> no canal direto) no instante 39 seg. de vôo: (a) filtro <i>Notch</i> sintonizado em 30 rad/s; (b) filtro <i>Notch</i> sintonizado em 40 rad/s. ....	139
5.39: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário, modelo completo com filtro <i>Notch</i> à 40 rad/s no canal direto e de realimentação. ....	140
5.40: Outros parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário e margem de fase e ganho, modelo completo com filtro <i>Notch</i> à 40 rad/s no canal direto e de realimentação. ....	141
5.41: Comparação dos métodos LQ e Analítico (modelo completo), ganhos do controlador, filtro <i>Notch</i> à 40 rad/s no canal de realimentação. ....	142

5.42: Comparação dos métodos LQ e Analítico (modelo completo), parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário, filtro <i>Notch</i> à 40 rad/s no canal de realimentação. ....	143
5.43: Comparação dos métodos LQ e Analítico (modelo completo), outros parâmetros, filtro <i>Notch</i> à 40 rad/s no canal de realimentação. ....	144
5.44: Comparação dos métodos LQ e Analítico (modelo completo), ganhos do controlador. ....	146
5.45: Comparação dos métodos LQ e Analítico (modelo completo), parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário. ....	147
5.46: Comparação dos métodos LQ e Analítico (modelo completo), outros parâmetros. ....	148



## LISTA DE TABELAS

	Pág.
5.1: Comparação de instantes de vôo para método LQ. ....	108
5.2: Resumo da variação dos parâmetros de resposta no tempo com parâmetros de ajuste $K_i _{M_{\alpha \max}}$ e $p_0$ utilizando modelo simplificado.....	129
5.3: Comparação de instantes de vôo para método Analítico. ....	131
A.1: Dados aerodinâmicos e outros dados do VLS.....	157
A.2: Parâmetros de flexão que variam ao longo do tempo do VLS.....	159



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolos Latinos

$A_r$	área de referência
$a_c$	aceleração centrípeta
$C_n$	coeficiente adimensional de força normal , eixo y ou z
$C_x$	coeficiente adimensional de arrasto, eixo x
$CL$	coeficiente adimensional de momento de rolamento, eixo x
$CM$	coeficiente adimensional de momento de arfagem, eixo y
$CN$	coeficiente adimensional de momento de guinada, eixo z
$Cn_\alpha$	Derivada do coeficiente adimensional de força normal com relação à $\alpha$
$Cn_\beta$	Derivada do coeficiente adimensional de força normal com relação à $\beta$
$g$	aceleração gravitacional da Terra
$\bar{I}$	matriz (ou tensor) de inércia
$K_p, K_i, K_d$	ganhos do controlador PID (proporcional, integral e derivativo, respectivamente)
$l_a$	braço de alavanca (distância entre o CG e o CP, medida no eixo x)
$l_c$	braço de alavanca de controle (distância entre o CG e o ponto de atuação da força de empuxo, medida no eixo x)
$l_r$	comprimento de referência
$L, M, N$	momentos de rolamento, arfagem e guinada, medidos nos eixos x y z, respectivamente, do sistema corpo
$L_p$	coeficiente de aceleração angular de rolamento em relação à $p$

$M_\alpha$	coeficiente de aceleração angular de arfagem em relação à $\alpha$
$M_{\beta_z}$	coeficiente de aceleração angular de arfagem em relação à $\beta_z$
$M_q$	coeficiente de aceleração angular de arfagem em relação à $q$
$M_p$	máximo sobresinal ( <i>overshoot</i> )
$N_r$	coeficiente de aceleração angular de guinada em relação à $r$
$N_\beta$	coeficiente de aceleração angular de guinada em relação à $\beta$
$N_{\beta_y}$	coeficiente de aceleração angular de guinada em relação à $\beta_y$
$p, q, r$	projeção da velocidade angular total do lançador em relação ao inercial nos eixos do sistema corpo
$P_{din}$	pressão dinâmica
$r$	raio
$t_{sub}$	tempo de subida (critério 100%)
$t_{ass}$	tempo assentamento (critério 2%)
$u, v, w$	projeção da velocidade linear total do CG em relação ao inercial nos eixos do sistema corpo
$\vec{v}_b^r, \vec{v}^r$	velocidade linear total do CG em relação ao sistema inercial, representado no sistema corpo
$\vec{v}^r, \vec{v}_b^r$	Velocidade do vento em relação ao inercial, representado no sistema corpo
$V_\infty$	velocidade do veículo em relação ao ar no infinito
$x, y, z$	eixos do sistema corpo
$X, Y, Z$	eixos do sistema inercial
$Y_\beta$	coeficiente de aceleração linear em $y$ em relação à $\beta$

$Y_{\beta_y}$	coeficiente de aceleração linear em y em relação à $\beta_y$
$Z_\alpha$	coeficiente de aceleração linear em z em relação à $\alpha$
$Z_{\beta_z}$	coeficiente de aceleração linear em z em relação à $\beta_z$

### Símbolos Gregos

$\alpha$	ângulo de ataque
$\beta$	ângulo de derrapagem
$\beta_y$	deflexão da tubeira no plano x y (sistema corpo)
$\beta_z$	deflexão da tubeira no plano x z (sistema corpo)
$\gamma$	ponto vernal
$\epsilon_r$	erro à entrada rampa
$\theta$	ângulo de Euler, rotação no eixo de arfagem
$\lambda$	longitude terrestre
$\lambda_s$	ângulo formado entre o meridiano de Greenwich e um eixo que parte do centro da Terra e aponta para o ponto vernal, medido no plano do Equador
$\xi$	coeficiente de amortecimento
$\varphi$	latitude terrestre
$\phi$	ângulo de Euler, rotação no eixo de rolamento
$\psi$	ângulo de Euler, rotação no eixo de guinada
$\omega, \omega_n$	freqüência natural ou velocidade angular
$\vec{\Omega}_b^{b/r}$	velocidade angular total do sistema corpo em relação ao sistema inercial, representado no sistema corpo

## Outros Símbolos

- ( )<sub>b</sub> vetor representado no sistema corpo ou *body*
- ( )<sup>r</sup> vetor medido em relação à base inercial (ou de referência)
- ( )<sup>o</sup> valor em graus (medida angular)
- $\frac{\delta}{\delta t}()$  derivada temporal relativa (eixo do corpo)

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ANA	Método Analítico
BLG	Bloco Girométrico
CG	centro de gravidade
CP	centro de pressão
LQ	método Linear Quadrático (ou <i>Linear Quadratic</i> )
PI	proporcional-integral
PID	proporcional-integral-derivativo
SPD	semi-plano direito
SPE	semi-plano esquerdo
TF	Função de transferência (ou <i>transfer function</i> )
VLS	Veículo Lançador de Satélites





## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 Conceitos Básicos

Lançadores e foguetes são sistemas não-lineares e variantes no tempo, tanto em termos da massa, posição do CG (centro de gravidade), momentos de inércia, modos de vibração (variam devido a queima do combustível e mudança de estágios) quanto em termos dos parâmetros aerodinâmicos (variam devido a altitude, velocidade, número de Mach etc). Portanto, são sistemas de análise complexa, pois *a priori* não permitem a aplicação da teoria de sistemas lineares, tais como funções de transferência. Porém, as propriedades de massa/inércia e aerodinâmicas do veículo podem ser consideradas constantes dentro de um certo intervalo de tempo (Greensite, 1970). Este intervalo é especificado de acordo com a dinâmica do veículo. Assim, pode-se aplicar a técnica dos pólos congelados, realizando-se um estudo linear invariante no tempo para cada intervalo de tempo.

A guiagem consiste no controle da trajetória do foguete, ou seja, o percurso do CG em relação ao sistema inercial adotado. Para que haja guiagem, sempre se faz necessário existir a navegação para fornecer a posição e velocidade do veículo ao longo do tempo.

A pilotagem consiste no controle da resposta de atitude, portanto, a rotação em relação ao CG, observando-se a resposta de “período curto”. É prática comum, estudar pilotagem e guiagem separadamente, como controles desacoplados. Isto não é totalmente possível, já que ambos têm requisitos conflitantes: a guiagem tenta minimizar os desvios de trajetória do CG, alterando a atitude do veículo e a pilotagem tenta minimizar a excursão de vários parâmetros, entre eles minimizar o ângulo de ataque, aliviando os esforços na estrutura do lançador (Greensite, 1970). Em geral, ao se realizar um controle de atitude (rotação em relação ao CG), a posição do CG em relação ao sistema inercial também é alterada, mas, se for considerado um curto período de tempo, esta

mudança é pequena, daí surge a idéia de desacoplar a guiagem e pilotagem em pequenos intervalos de tempo (da ordem de segundos para lançadores).

Todo veículo que voa, seja uma aeronave que se utiliza de suas asas para se sustentar no ar ou um veículo propulsionado através da queima de propelentes, necessita de uma certa margem de estabilidade (isto é, necessita de uma robustez às variações que põem em risco a estabilidade) para poder executar suas manobras. Os lançadores/foguetes podem ser estáveis ou instáveis em malha aberta dependendo da posição do CG em relação ao centro de pressão ou CP (ponto onde se aplica a força aerodinâmica total equivalente do veículo). Para que haja estabilidade natural o CG deve estar à frente do centro de pressão, pois ao sofrer uma pequena perturbação em termos de ângulo de ataque, a força aerodinâmica total aumenta e o momento resultante é no sentido de diminuir o ângulo de ataque, portanto retornando ao equilíbrio inicial (vide FIGURA 1.1).

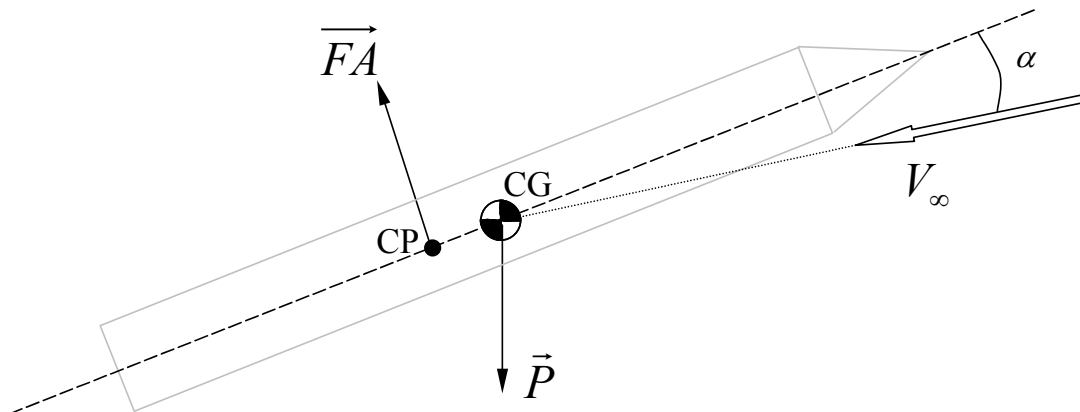


FIGURA 1.1: Foguete com estabilidade natural.

A principal perturbação externa é o vento, que pode ser dividido basicamente em 4 tipos: vento forte, rajada, vento cisalhante (*wind shear*) e vento oscilatório. O vento forte (tal qual um vento lateral constante) afeta sensivelmente a posição do CG, sem quase afetar a atitude, deslocando-o lateralmente, sendo assim de grande importância para a guiagem. O vento cisalhante afeta

diretamente a atitude, pois introduz uma variação da velocidade do vento ao longo do tempo e ao longo da estrutura do lançador (cisalhamento), perturbando-o em termos de rotação, e, portanto, em termos da atitude. A rajada assemelha-se à metade do período de uma senóide, e tem curta duração, fazendo lembrar um impulso. Já o vento oscilatório seria semelhante a uma senóide. Tanto a rajada quanto o vento oscilatório também influenciam a atitude do lançador.

Outra perturbação existente, mas de natureza interna, que afeta o controle de atitude é o *sloshing* (balanço). Está presente somente nos lançadores de combustível líquido ou que contenham grandes compartimentos com líquido que possua superfície livre. Este fenômeno ocorre devido à movimentação deste líquido dentro do compartimento, fazendo com que a posição do CG varie. Greensite (1970) modela este efeito como um pêndulo preso ao CG do foguete, onde a massa do pêndulo representa a massa de desalinhamento do líquido. O *sloshing* pode ser minimizado, por exemplo, evitando a superfície livre ou diminuindo esta superfície através de placas dentro do compartimento (aumentando a frequência de oscilação, mantendo-a longe das baixas frequências de flexão do foguete).

A flexão é uma perturbação também interna, presente em todos os lançadores/foguetes em maior ou menor grau. O grande problema da flexão é o fato desta ser uma perturbação realimentada (isto é, o atuador da tubeira estimula a flexão e esta afeta as deflexões do atuador devido à movimentação dos sensores de atitude em relação ao CG) e, portanto, pode facilmente instabilizar o veículo caso não seja devidamente modelada e atenuada.

Existem diversas técnicas para minimizar seus efeitos. A primeira é fazer com que a estrutura do foguete seja muito rígida, de modo que as frequências de flexão sejam bem altas, não sendo então excitadas pelas manobras e movimentos de atitude de menor frequência do controle (nem pelo *sloshing*, quando é o caso), podendo até ser desconsiderada. No caso de um veículo de

pequeno porte, esta técnica é válida pois o veículo é pequeno e rígido (corpo pouco alongado).

Já no caso dos lançadores de satélite que precisam atingir grandes altitudes e não necessitam realizar manobras muito bruscas, o design típico é de estruturas compridas (esbeltas) as quais não podem ser rígidas em demasia devido ao peso da estrutura que tornaria o projeto inviável. A solução adotada nestes casos é uma relação de compromisso entre a rapidez das manobras a serem realizadas e a rigidez da estrutura. Busca-se, desta forma, se executar manobras com frequências mais baixas (manobras não tão rápidas) que as frequências de flexão, para que os modos de flexibilidade não sejam excitados. Mesmo assim, é necessário se adotar filtros nos sensores para que os modos de flexão sejam atenuados, principalmente o 1º e 2º modos (os outros modos possuem frequências muito altas e bem amortecidas, podendo em geral ser ignorados), pois os ventos e outros fenômenos não contabilizados ou desconsiderados podem, e vão, excitar a vibração natural do lançador.

## **1.2 Objetivo e Motivação**

Neste trabalho, busca-se a implementação de um método analítico para obtenção dos ganhos da malha de controle de atitude do VLS, utilizando o modelo de corpo rígido e um controlador proporcional-integral com realimentação de velocidade. Este trabalho apenas considera o estudo de pilotabilidade e desempenho do sistema controlado, atendo-se, assim, à resposta de curto período da atitude e desconsiderando, portanto, a guiagem. Por fim, uma verificação da robustez é realizada, incluindo a flexão e sua filtragem.

A motivação baseia-se na possibilidade de obtenção de melhores resultados de desempenho no tempo aliado a melhores margens de ganho e fase quando comparado com o método Linear Quadrático (LQ) já utilizado. Também é de interesse uma melhora no ciclo limite (oscilação da tubeira que surge devido as não-linearidades do atuador).

### 1.3 Organização

No Capítulo 2 é apresentada a Revisão Bibliográfica, com os trabalhos de diversos autores sobre assuntos relacionados a lançadores e mísseis controlados.

No Capítulo 3 é desenvolvida a dinâmica de um lançador rígido começando pela escolha do sistema inercial e bases móveis, o desenvolvimento das equações de movimento linear e em seguida das equações de movimento angular de um lançador rígido. Por fim, diversas hipóteses e requisitos simplificadores são discutidos, obtendo-se por fim a função de transferência de um lançador de corpo rígido: um modelo simplificado e um outro ainda mais simplificado.

No Capítulo 4 é apresentada a arquitetura de controle adotada, em seguida a metodologia de cálculo dos ganhos do controlador que vinha sendo utilizada (método LQ) e por fim, a nova metodologia proposta (método Analítico).

No Capítulo 5 são apresentados os resultados específicos do VLS. Inicialmente, os dados deste lançador, em seguida as especificações para as metodologias de cálculo dos ganhos e por fim, os resultados de simulação. Os resultados são analisados para dois modelos: de corpo rígido simplificado e um modelo completo, contendo os modos de flexão, filtros e dinâmica da tubeira. É feita uma comparação dos resultados obtidos para os dois métodos utilizando o modelo completo. Neste capítulo, também é feita uma discussão a respeito do posicionamento do filtro *Notch* na malha de controle e sua sintonização.

No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões deste trabalho.

No Apêndice A são apresentados os dados aerodinâmicos, de flexão e outros parâmetros do VLS.



## CAPÍTULO 2

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Greensite (1970) é uma obra bem completa e abrangente, apresenta de maneira detalhada o equacionamento da atitude de veículos lançadores e, conjuntamente, modela as principais perturbações relevantes para a pilotagem, tais como *sloshing* e flexão. As hipóteses simplificadoras são apresentadas, obtendo-se, por fim, após a linearização das equações de movimento em torno da condição nominal de operação, a função de transferência do modelo simplificado de corpo rígido e também de um modelo mais simplificado de corpo rígido. Além do modelo linearizado de corpo rígido, é apresentada a função de transferência com flexão e *sloshing*. O ajuste dos ganhos do controle de atitude não é o enfoque desta obra, mas diversas simulações no tempo mostram a variação da resposta com os ganhos da malha de controle.

Blakelock (1991) utiliza controle PD, ajustando os ganhos principalmente através do estudo do lugar das raízes. Primeiro, analisa a planta com realimentação de velocidade e ajusta o ganho derivativo (determinando-se os pontos notáveis). Em seguida, ajusta o ganho proporcional, mantendo-se o ganho derivativo já obtido. Esta técnica se aplica bem para lançadores naturalmente estáveis, mas se torna de pouca utilidade para veículos instáveis, pois não permite o ajuste dos ganhos da malha de realimentação de velocidade primeiramente (o ganho derivativo não é suficiente para tornar a planta estável).

Wie (1998) trata da dinâmica e controle de atitude voltada para corpos fora da atmosfera, além de manobras orbitais. Apresenta diversos exemplos práticos e técnicas de controle de atitude para satélites e outros corpos com órbitas terrestres (telescópios, estações espaciais etc.). De grande interesse é o uso de quaternions no lugar dos ângulos de Euler, que permitem um menor esforço computacional e não possuem o inconveniente das singularidades. Sua desvantagem reside na perda da noção física de cada parâmetro de rotação que é clara ao se usar os ângulos de Euler.

Malyshev et al. (1996) trata de diversos métodos, algoritmos e técnicas de pilotagem e guiagem de diversos veículos espaciais, apresentando enfoques tanto determinísticos como estocásticos. O ponto de vista de diversos pesquisadores tanto russos quanto brasileiros permite uma visão geral do controle de veículos lançadores. Clement et al. (2001) mostra um estudo via controle de estados para lançadores com modos de flexão. Utiliza ganhos escalonados, analisando uma técnica não-linear de interpolação que garante a estabilidade e que, em alguns casos, pode se tornar linear.

Murphy (1981) discute diversas condições de instabilidade dinâmica tanto para mísseis estaticamente estáveis como para projéteis e mísseis naturalmente (estaticamente) instáveis que são estabilizados passivamente através de efeito giroscópico (altas taxas de rolamento ou *spin*). Citando o autor “São causas de instabilidade dinâmica para mísseis basicamente simétricos: 1) momento de amortecimento linear instável, 2) momento de amortecimento não-linear e desigual no plano e fora-do-plano, 3) momento de Magnus linear e não-linear, 4) ressonância *spin*-guinada para mísseis com ajuste (momento diferente de zero para ângulo de ataque nulo, surge devido a presença de aletas), 5) *spin lock-in* e momento lateral induzido agindo em mísseis com ajuste, 6) momento de amortecimento não-linear agindo em mísseis com ajuste, 7) movimentação de componentes internos, 8) *spin* na ‘região’ de ressonância de mísseis quase simétricos, 9) nenhuma das anteriores ....”.

Shapiro (1981) apresenta uma metodologia de alocação de pólos baseada numa minimização de um funcional da distância entre os pólos desejados e os pólos do sistema de malha fechada. Um exemplo para o controle latero-direcional de uma aeronave é apresentado com valores numéricos e o algoritmo de cálculo é demonstrado. O resultado final são exatamente os pólos desejados e é feita uma discussão a respeito das não-uniformidades dos ganhos de realimentação, mostrando que alguns ganhos não contribuem para melhora do desempenho podendo ser desconsiderados, simplificando a estrutura do controlador.



Em diversas aplicações do ramo aeronáutico e espacial, é feita a hipótese de sistemas contínuos mesmo para aplicações com computadores digitais. Balas (1982) apresenta dois teoremas que estabelecem certas restrições no tamanho do passo de tempo permitido para discretização. Estes teoremas garantem a estabilidade dos algoritmos implementados considerando a hipótese de sistemas contínuos.

Estudos de sistemas de controle com algoritmos de otimização multi-objetivo vêm sendo utilizado no ramo para lançadores. Clement e Duc (2000b) adotam requisitos de margem de estabilidade, robustez ao vento, pequeno erro de guiagem e robustez com relação às incertezas de corpo rígido e modos de flexão para o controle de um lançador com modos de flexão usando teoria  $H_\infty$ . Bals et al. (1994) discute o ajuste de uma aproximação semi-analítica para um sistema de placa plana com duas malhas de realimentação (controle de vibração), uma utilizando o conceito positivo de robustez e a outra usando a teoria  $H_\infty$ . Outro exemplo de controle multi-objetivo (usando teoria  $H_2 / H_\infty$  com restrições de estabilidade  $\alpha$ , onde  $\alpha$  é um critério adotado e não o ângulo de ataque) é discutido por Clement e Duc (2000a) para um braço flexível com 3 cargas diferentes, onde os requisitos são para resposta no tempo (tempo de assentamento e subida) e na frequência.

Winning et al. (1977) apresenta um método de sensibilidade (aplicado para um gerador síncrono, mas aparenta ser um método promissor para diversas aplicações) para otimização *on-line* que tem a vantagem de ser um método direto pois não demanda a identificação explícita do sistema controlado para obtenção das funções de sensibilidade. Utiliza apenas um teste usando uma entrada degrau.

Um resumo dos dados do VLS (Veículo Lançador de Satélites) consta em Isakowitz et al. (1999). Este é guia contém informações de diversos sistemas e projetos de lançadores desenvolvidos ao redor do mundo.



## CAPÍTULO 3

### DINÂMICA DE UM LANÇADOR RÍGIDO

#### 3.1 Definição da Base Inercial e Bases Móveis

No estudo de resposta dinâmica de qualquer sistema mecânico, primeiramente deve-se estabelecer as bases móveis e inercial do sistema (ou referencial inercial e referenciais móveis). Estas bases ou triedros são formados por 3 vetores, ortogonais entre si (dois a dois) e iniciam em um único ponto denominado origem do sistema ou, simplesmente, origem.

A escolha das bases móveis é um processo arbitrário, sua colocação pode esclarecer ou dificultar o entendimento da dinâmica do sistema em questão. Assim, o posicionamento das bases móveis se baliza, em geral, na simplificação das equações de movimento e muitas vezes é um processo empírico até que se tenha um conjunto de bases móveis que simplifique ao máximo as equações de movimento e permita uma maior compreensão dos fenômenos físicos envolvidos.

Diferentemente das bases móveis, a escolha do sistema inercial é balizada exatamente pelo termo “inercial”, ou de uma maneira mais simplista “aquele que não se move”. No entanto não existe uma base inercial, esta é somente uma abstração física. Porém busca-se uma base que seja a mais “imóvel” possível e ao mesmo tempo simplifique as equações de movimento. Esta é uma relação de compromisso, que deve ser satisfeita buscando-se a base inercial que simplifique ao máximo as equações de movimento e ainda possa ser considerada inercial, sem afetar a qualidade das equações de movimento, sendo que essa qualidade é determinada pelos requisitos de projeto.

Por exemplo, o centro de nossa galáxia, a Via Láctea, poderia ser considerado a origem do sistema inercial, desta forma, o movimento do Sol em relação a este centro seria incluído nas equações de movimento do sistema em estudo. O eixo X deste sistema poderia apontar para uma outra galáxia muito distante, de maneira que praticamente se mantivesse fixo no espaço e o eixo Y no plano

da Via Láctea. No entanto, devido a enorme distância do Sol ao centro da nossa galáxia, mesmo possuindo uma grande velocidade tangencial, a aceleração centrípeta é muito pequena. Considerando que a órbita do Sol em relação ao centro da via Láctea é um movimento circular uniforme (só existe aceleração centrípeta), tem-se:

$$a_c = \omega^2 r$$

onde,

$r$  é o raio da circunferência;

$a_c$  é a aceleração centrípeta;

$\omega$  é a velocidade angular;

$v_t$  é a velocidade tangencial.

E a velocidade tangencial é dada por:

$$v_t = \omega r$$

Substituindo uma equação na outra, chega-se a

$$a_c = (v_t)^2 / r$$

Utilizando os dados astronômicos (Nasa Clube Brasil, 2004):

raio Sol - centro Via Láctea:  $r \cong 2,891010e20$  m

velocidade tangencial do Sol:  $v_t \cong 921600$  km/h = 256000 m/s

$$a_c \cong \mathbf{2,266889e-10 \text{ m/s}^2} \cong \mathbf{0}$$

Ou seja, a aceleração é pequena demais e praticamente não influencia na dinâmica de um lançador na Terra. Assim a escolha do centro da Via Láctea como origem da base inercial se torna desnecessário.

O próximo passo é natural: a escolha do centro do Sol como origem do sistema inercial e os eixos apontando no mesmo sentido citado acima. Da mesma forma que o Sol, a aceleração centrípeta da Terra em relação ao Sol é pequena (dados retirados de Nasa Clube Brasil, 2004):

Raio Terra - Sol:  $r \cong 150e9$  m

Velocidade tangencial da Terra:  $v_t \cong 107200$  km/h  $\cong 29777,77$  m/s

$$a_c = (v_t)^2 / r \cong \mathbf{0,0059 \text{ m/s}^2} \cong \mathbf{0}$$

Como todos corpos que estão na Terra (incluindo satélites terrestres), possuem praticamente a mesma velocidade em relação ao Sol, então a escolha do Sol como referência inercial também se torna desnecessária.

Com base nisso, o centro da Terra é a próxima origem do sistema inercial a ser analisado (ponto  $O_1$ ) e, neste caso, o eixo  $Y_1$  aponta para o ponto vernal  $\gamma$  (um ponto no espaço muito distante da Terra, de modo que possa ser considerado praticamente “fixo”, veja Kuga e Rao (1995) ). Além disso, considere que este eixo  $Y_1$  passa pelo plano do equador terrestre e o eixo  $Z_1$  está também neste mesmo plano, o eixo  $X_1$  completa o sistema dextrógero (aponta para o Norte geográfico). Este sistema é denominado SYS1 e pode ser visto na FIGURA 3.1.

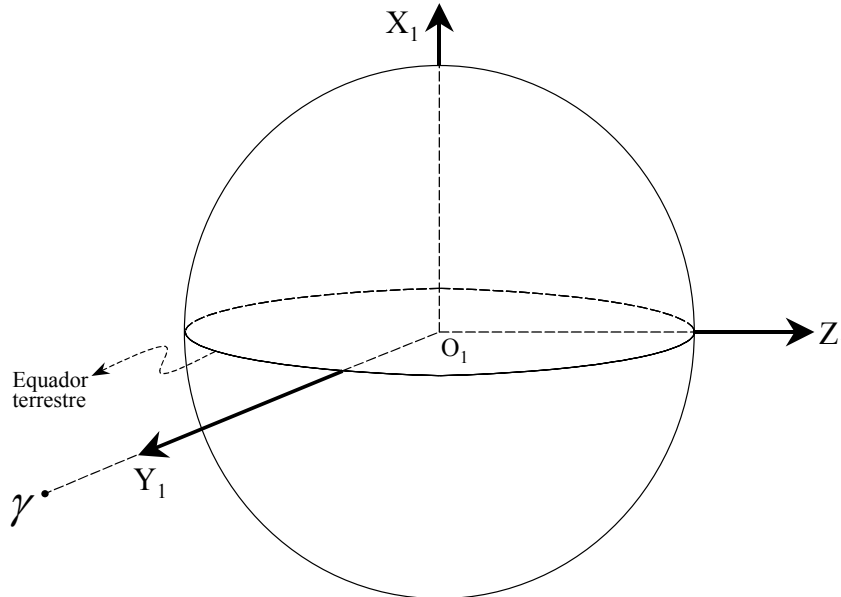


FIGURA 3.1: Sistema SYS1.

Este sistema é bastante utilizado para o cálculo de órbitas terrestres e manobras a partir da Terra pois é bastante estável e varia lentamente, além de ser corrigido de tempos em tempos (o ponto vernal é corrigido periodicamente).

O sistema ou base móvel SYS2 pode ser visto na FIGURA 3.2 e, diferentemente de SYS1, este sistema é solidário à Terra e, portanto, gira com ela. Para se passar de SYS1 para SYS2, basta rotacionar de  $\lambda + \lambda_s$  em  $X_1$  positivo, sendo que o eixo  $Y_2$  passa pelo meridiano da base de lançamento ( $\lambda_s$  é o ângulo entre  $Y_1$  e o meridiano de Greenwich, medido no plano  $Y_1Z_1$ , e  $\lambda$  é o ângulo entre o meridiano de Greenwich e o meridiano que passa pela base de lançamento, medido no mesmo plano). Como Greenwich tem longitude  $0^0$ , então a longitude da base de lançamento é o próprio ângulo  $\lambda$  (considerando a longitude variando de  $-180$  a  $+180^0$ ).

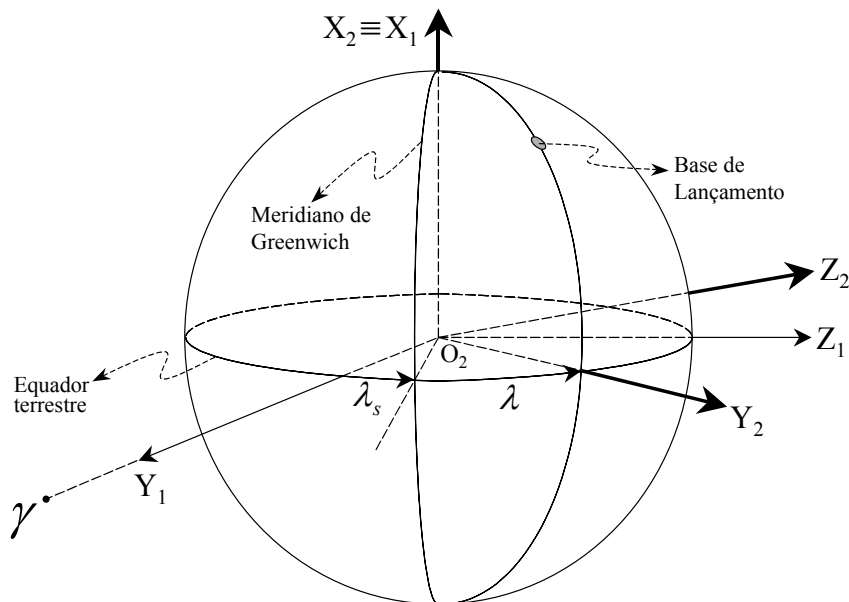


FIGURA 3.2: Sistema SYS2.

O sistema SYS3 é denominado sistema topocêntrico e tem como origem um ponto na superfície da Terra com longitude  $\lambda$  (neste caso a base de lançamento). Considera-se que este ponto de origem é a base do lançador (ponto onde o eixo de simetria do lançador cruzaria a base de lançamento). O eixo  $Y_3$  aponta para o pólo sul geográfico, o eixo  $Z_3$  para o leste, o eixo  $X_3$  aponta na direção do zênite. Para se passar do sistema SYS2 para o SYS3, deve-se efetuar uma rotação de  $90^0 - \varphi$  ( $\varphi$  é a latitude da base de lançamento) no sentido de  $+Z_2$ , conforme pode ser visto na FIGURA 3.3.

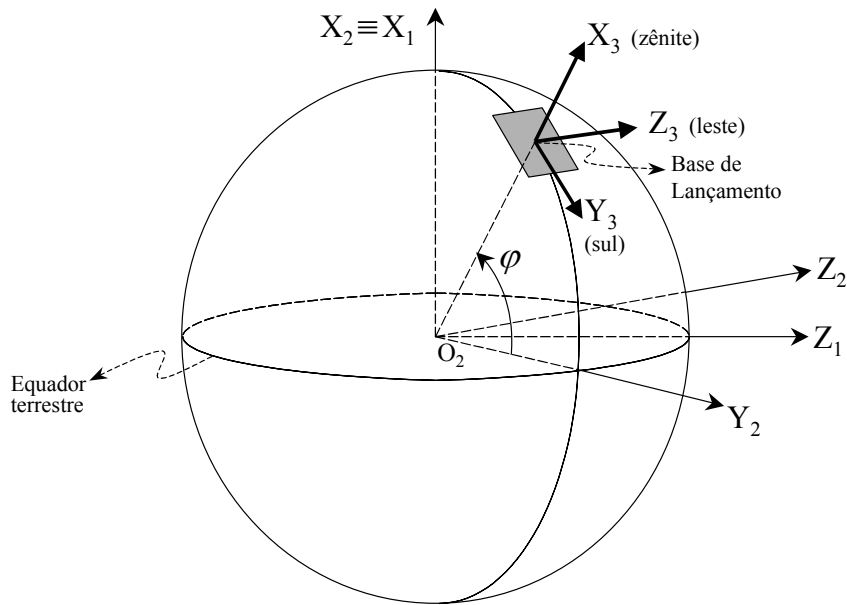


FIGURA 3.3: Sistema SYS3.

O sistema SYS4 tem como origem o CG do lançador e é solidário a este, os 3 eixos se mantêm paralelos aos eixos do sistema SYS3, como pode ser visto na FIGURA 3.4.

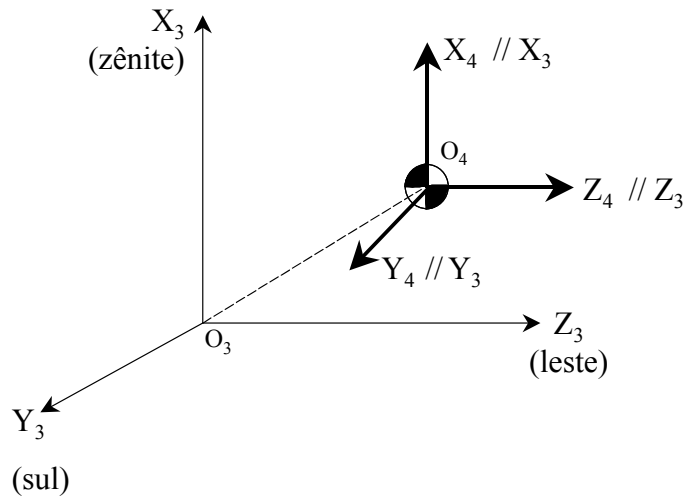


FIGURA 3.4: Sistema SYS4.

O sistema SYS5 (ou sistema corpo) tem mesma origem de SYS4, porém o eixo  $X_5$  está alinhado com o eixo de simetria do foguete-lançador. O plano  $X_5 Z_5$  é denominado plano de arfagem e o plano  $X_5 Y_5$ , plano de guinada (FIGURA 3.5). Ambos são planos de simetria do lançador.

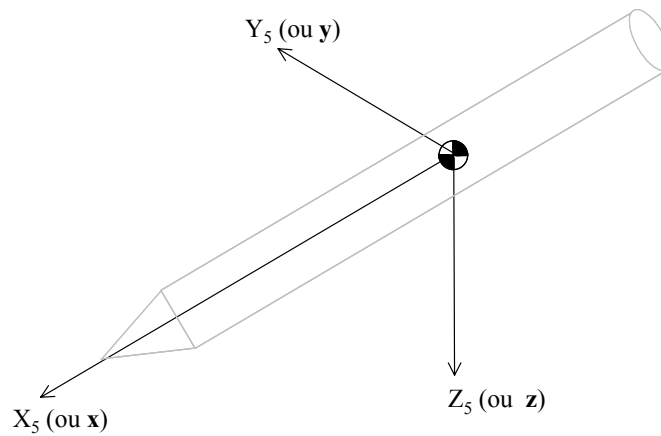


FIGURA 3.5: Sistema SYS5.

Para se passar de SYS4 para SYS5, deve-se utilizar as devidas rotações através dos ângulos de Euler. Como são rotações consecutivas e não-comutativas, uma certa ordem deve ser obedecida. Foi adotada a seqüência 2-3-1 (Wie, 1998), ou seja:

- a) 1ª Rotação de  $\theta$  em torno do eixo  $Y_4$  (eixo de arfagem – *pitch*), obtendo-se o sistema temporário  $X_4', Y_4', Z_4'$  (veja FIGURA 3.6);
- b) 2ª Rotação de  $\Psi$  em torno do eixo  $Z_4'$  (eixo de guinada – *yaw*), obtendo-se o sistema temporário  $X_4'', Y_4'', Z_4''$  (veja FIGURA 3.6);
- c) 3ª Rotação de  $\phi$  em torno do eixo  $X_4''$  (eixo de rolamento – *roll*), resultando no sistema corpo SYS5 ( $X_5 Y_5 Z_5$  ou simplesmente  $xyz$ )



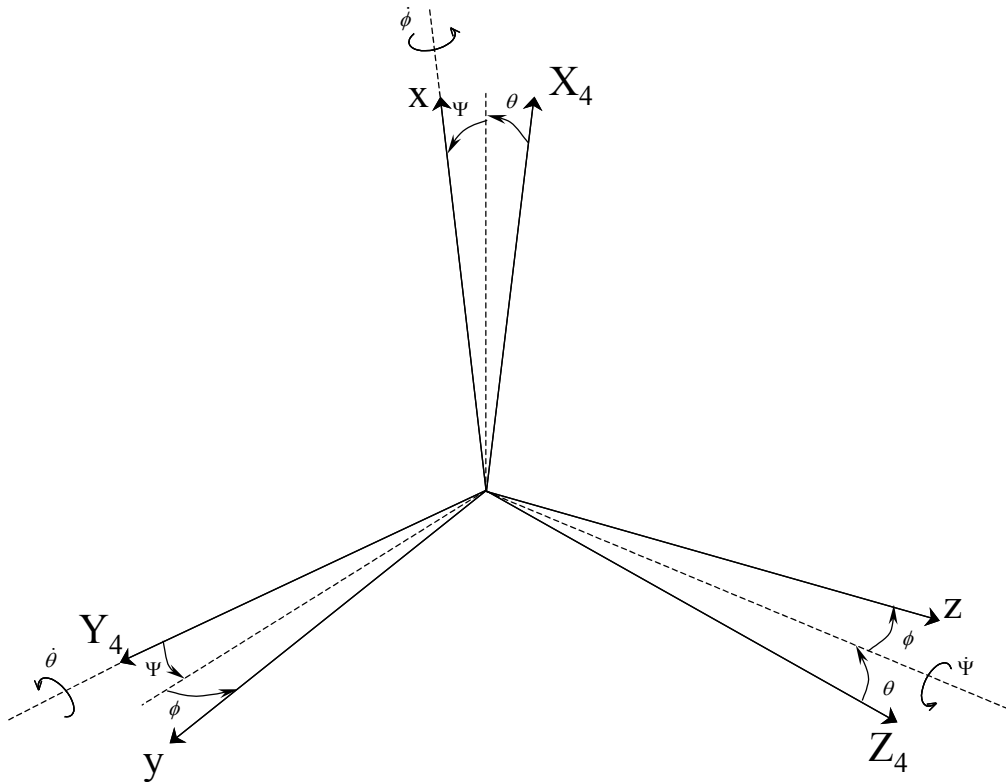


FIGURA 3.6: Rotação do triedro inercial ( $X_3 Y_3 Z_3$  ou  $XYZ$ ) para corpo ( $X_5 Y_5 Z_5$  ou  $xyz$ ) utilizando ângulos de Euler.

Uma vez estabelecida a base inercial  $SYS1$  e as bases móveis  $SYS2$  a  $SYS4$ , passa-se à análise da base  $SYS1$  como inercial. Comparando a base  $SYS1$  com a base  $SYS3$ , verifica-se que para se passar de  $SYS1$  para  $SYS3$ , deve-se rotacionar de  $\lambda + \lambda_s$  para se chegar à base  $SYS2$  e rotacionar de  $90^\circ - \varphi$  para se chegar à base  $SYS3$ . Os ângulos  $\lambda$  e  $\varphi$  são respectivamente a longitude e a latitude da base de lançamento (mais precisamente, do ponto formado pelo encontro do eixo de simetria do lançador e a superfície da Terra) e são ângulos fixos, ou seja, não variam no tempo. Já o ângulo  $\lambda_s$  varia de acordo com a rotação da Terra, pois é o ângulo entre o meridiano de Greenwich e eixo  $Y_1$  que aponta para o ponto vernal  $\gamma$ . Isto significa que se  $\lambda_s = 0^\circ$  para um dado instante  $t$ , somente após aproximadamente 24 horas este ângulo voltará a ser zero. Assim, a velocidade de rotação da Terra é aproximadamente  $\Omega = 7,268 \times$

$10^{-5}$  rad/s, a aceleração centrípeta de um ponto 1000 Km sobre o Equador, considerando a Terra uma esfera é

Raio aproximado da Terra no Equador:  $6000 \text{ Km} = 6 \times 10^6 \text{ m}$

Raio aproximado na altitude de 1000 Km:  $r \cong 6000 \text{ Km} + 1000 \text{ Km} = 7000 \text{ Km} = 7 \times 10^6 \text{ m}$

$$a_c = \Omega^2 \cdot r = (7,268 \times 10^{-5})^2 \cdot (7 \times 10^6) \cong \mathbf{0,037 \text{ m/s}^2}$$

Isto significa que caso o sistema SYS3 seja adotado como base inercial ao invés de SYS1, o erro em termos da aceleração centrípeta é pequeno e poderia ser desprezado, já que é da ordem de grandeza do erro dos girômetros adotados nos lançadores espaciais.

Citando Blakelock (1991, p. 10), “esta hipótese de que a Terra é fixa, não é válida para sistemas de guiagem inercial, porém é válida para análise de sistemas de controle automático e simplifica bastante as equações. A validade desta hipótese é baseada no fato dos girômetros e acelerômetros normalmente utilizados para sistemas de controle serem incapazes de sentir a velocidade angular da Terra ou acelerações resultantes desta velocidade angular como a aceleração de Coriolis”. Além disso, considera-se que o lançador analisado é rígido.

Desta forma, a nova base inercial a ser considerada passa a ser a base SYS3, isto é, o sistema fixo na base de lançamento e para se passar para o sistema corpo, basta se passar primeiro para base SYS4 (translação pura) e, em seguida, rotacionar através dos ângulos de Euler, como descrito acima, para se chegar no sistema corpo SYS5.

### **3.2 Equacionamento da Dinâmica de um Lançador de Satélites**

Uma vez estabelecido o sistema inercial SYS3 e suas bases móveis SYS4 e SYS5, pode-se determinar as equações de movimento de um lançador rígido.

### 3.2.1 Equações Translacionais

Primeiramente, define-se a velocidade total do CG em relação à base inercial (SYS3). Como todo equacionamento desenvolvido neste trabalho é feito no sistema corpo, então a velocidade total do CG é representada no sistema corpo ou *body* (SYS5), o qual está fixo e alinhado com o corpo do lançador, conforme FIGURA 3.7.

$$\vec{v}_b^r = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

onde,

$\vec{v}_b^r$  é a velocidade linear total do CG em relação à base inercial (ou base de referência "r") representada no sistema corpo ou *body* (SYS5);

$u, v, w$  são as componentes da projeção da velocidade total  $\vec{v}_b^r$ , nos eixos  $X_5Y_5Z_5$ , respectivamente (FIGURA 3.7).

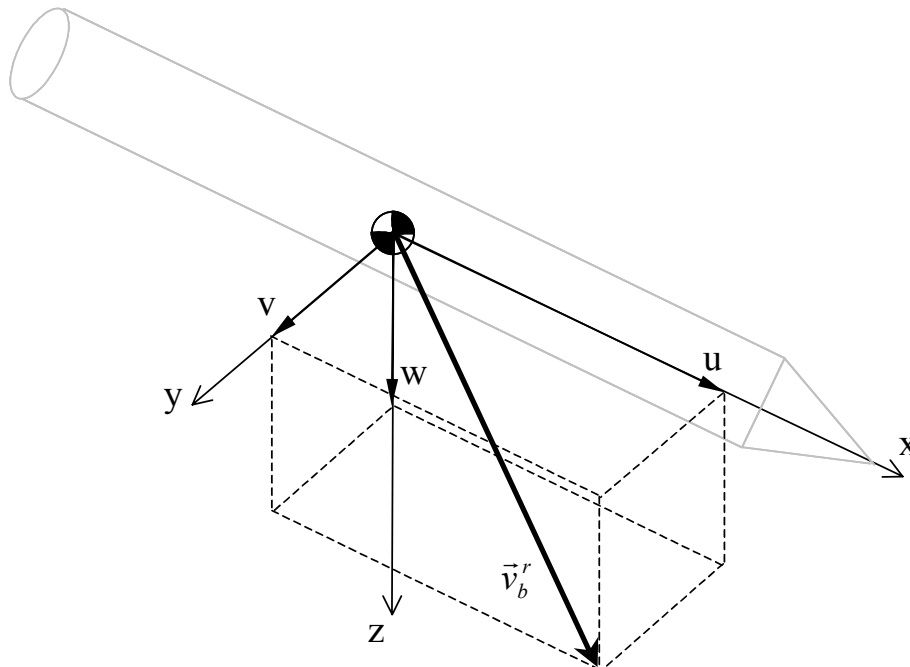


FIGURA 3.7: Velocidades lineares ( $u, v, w$ ), projeções da velocidade linear  $\vec{v}_b^r$  nos eixos do sistema corpo.

Pela segunda lei de Newton, a somatória das forças que agem sobre o veículo é igual à variação temporal do momento linear:

$$\sum \vec{F}_b = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}_b^r) = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v}_b^r + m \cdot \frac{d\vec{v}_b^r}{dt} \quad (3.2)$$

onde,

$\sum \vec{F}_b$  é a somatória das forças sobre o corpo, representada no sistema corpo;

$m$  é a massa instantânea do veículo lançador.

O termo  $(dm/dt) \cdot \vec{v}_b^r$  surge devido a variação de massa do veículo (ocasionada pela saída dos gases de escape) do lançador ao longo do tempo. Este termo é contabilizado como a força de empuxo ( $\overline{FE}$ ) diretamente na somatória das forças  $\sum \vec{F}_b$ .

Desta forma, a Equação (3.2) simplifica para

$$\sum \vec{F}_b = m \cdot \frac{d\vec{v}_b^r}{dt} \quad (3.3)$$

O segundo termo da equação acima, a derivada temporal do vetor velocidade total  $\vec{v}_b^r$ , deve levar em conta o fato da base móvel SYS5 (base na qual o vetor velocidade total está representado) rotacionar em relação à base inercial SYS3. Desta forma, torna-se necessário definir as rotações da base SYS5 em relação à base SYS3. Assim, define-se o vetor velocidade angular total do sistema corpo em relação ao sistema inercial SYS3, representado no sistema corpo:

$$\vec{\Omega}_b^{b/r} = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

onde,

$\vec{\Omega}_b^{b/r}$  é a velocidade angular total do sistema corpo em relação ao sistema inercial, representado no sistema corpo;

$p, q, r$  são as componentes da projeção da velocidade angular total  $\vec{\Omega}_b^{b/r}$  nos eixos  $X_5Y_5Z_5$ , respectivamente (FIGURA 3.8).

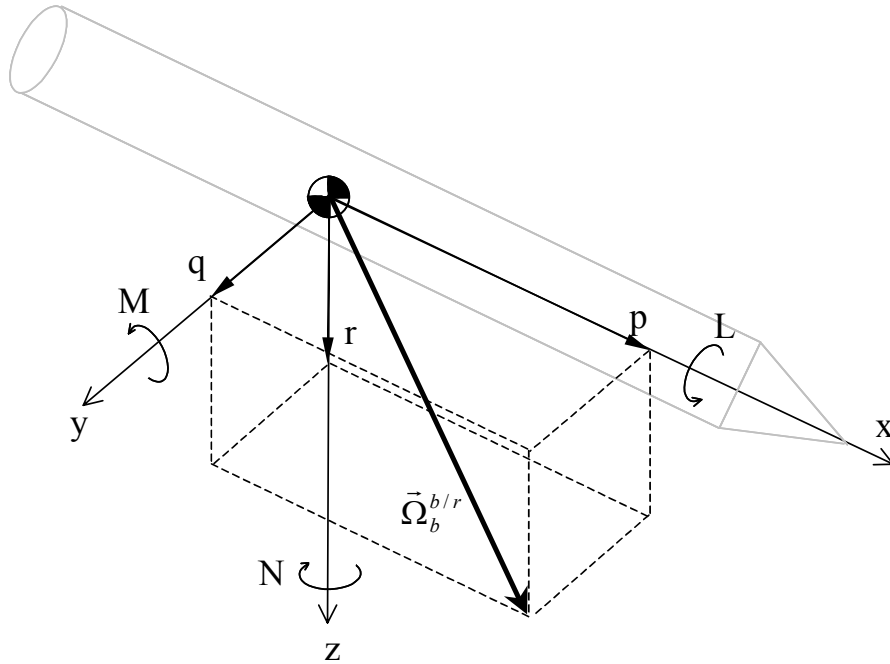


FIGURA 3.8: Velocidades angulares ( $p, q, r$ ), projeções da velocidade angular  $\vec{\Omega}_b^{b/r}$  nos eixos do sistema corpo. Os momentos  $L, M, N$  também são mostrados.

Então, a derivada temporal do vetor velocidade total, representada no sistema corpo, é dada pela derivada temporal relativa que fornece a variação em termos da magnitude mais a variação do vetor em termos de direção, que é calculado pelo produto vetorial da velocidade angular da base móvel pelo vetor que está sendo derivado (veja Greensite, 1970; Blakelock, 1991; Santos, 2001):

$$\frac{d\vec{v}_b^r}{dt} = \frac{\delta\vec{v}_b^r}{\delta t} + \vec{\Omega}_b^{b/r} \times \vec{v}_b^r \quad (3.5)$$

onde,

$\frac{\delta \vec{v}_b^r}{\delta t}$  é a derivada temporal relativa (derivada no eixo corpo), que representa

a variação do vetor  $\vec{v}_b^r$  em termos de magnitude;

$\vec{\Omega}_b^{b/r} \times \vec{v}_b^r$  é a variação do vetor  $\vec{v}_b^r$  em termos de direção, que surge devido a rotação do sistema corpo SYS5 (na qual  $\vec{v}_b^r$  é representado) em relação ao sistema inercial (veja Blakelock, 1991 apêndice A).

Assim, a derivada temporal total do vetor de velocidade do lançador, é calculado conforme a Equação (3.5):

$$\frac{d\vec{v}_b^r}{dt} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{u} + qw - rv \\ \dot{v} + ru - pw \\ \dot{w} + pv - qu \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

onde,

$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$  são as componentes da projeção na direção  $X_5, Y_5, Z_5$ , respectivamente, da variação temporal da velocidade linear total em termos de magnitude.

Deste ponto em diante, todos os vetores sem o sub-índice explícito, são representados no sistema corpo.

A somatória das forças externas no lançador é dada por (já incluído o termo de empuxo  $\vec{FE} = -(dm/dt) \cdot \vec{v}_b^r$ ):

$$\sum \vec{F} = \vec{FE} + \vec{P} + \vec{FA} \quad (3.7)$$

onde,

$\vec{FE}$  é a força de empuxo que atua na base do lançador, que surge devido a saída dos gases de escape;

$\vec{P}$  é a força peso que atua no CG;

$\vec{FA}$  é a força aerodinâmica equivalente total, que atua no centro de pressão (CP).

A representação física de cada força pode ser vista na FIGURA 3.9. Conforme mostrado na FIGURA 1.1, a posição relativa do CG e CP determina a estabilidade natural do veículo. Caso o CG esteja atrás do CP, para um pequeno ângulo de ataque perturbativo, a força aerodinâmica equivalente que surge causa um momento no CG que tende a aumentar este ângulo de ataque e, portanto, aumenta ainda mais a força aerodinâmica. Assim, neste caso, o sistema é instável aerodinamicamente. Na situação contrária (CG á frente do CP), a força aerodinâmica seria a mesma, porém o momento em relação ao CG tem sentido contrário e tende a diminuir o ângulo de ataque, diminuindo também a força aerodinâmica e dessa forma, o sistema é estável aerodinamicamente.

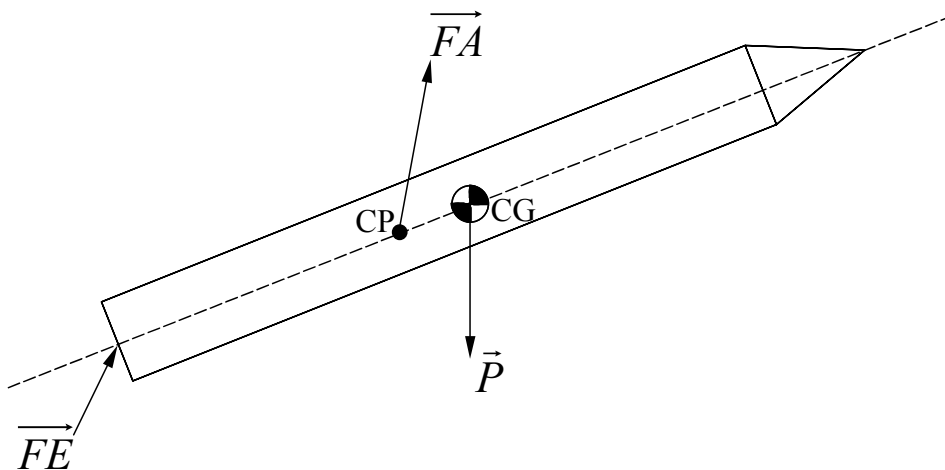


FIGURA 3.9: Forças atuantes no veículo.

### 3.2.1.1 Força de Empuxo

A força de empuxo é representada na FIGURA 3.10, com suas respectivas projeções nos três eixos do sistema corpo.

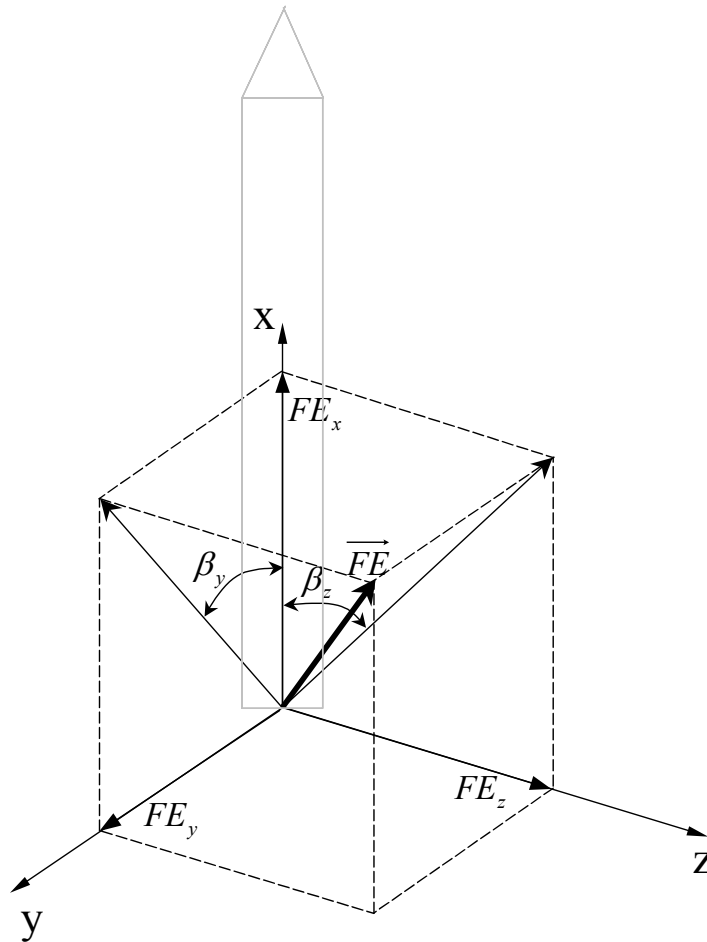


FIGURA 3.10: Força de empuxo no triedro do corpo.

Os ângulos de deflexão da tubeira móvel (ou ângulos equivalentes de deflexão de jato)  $\beta_y$  e  $\beta_z$  são definidos positivos quando geram forças  $FE_y$  e  $FE_z$  positivas, respectivamente. Assim, a força de empuxo é igual:

$$\vec{FE} = \begin{Bmatrix} FE_x \\ FE_y \\ FE_z \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

onde,



$FE_x, FE_y, FE_z$  são as projeções nos eixos  $X_5Y_5Z_5$  da força de empuxo  $\overrightarrow{FE}$ . Os termos da força de empuxo nos 3 eixos do sistema corpo são obtidos em Mallaco (1987):

$$FE_x = FE \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \beta_y \cos^2 \beta_z}{1 - \sin^2 \beta_y \cos^2 \beta_z} - \frac{\cos^2 \beta_y \sin^2 \beta_z}{1 - \cos^2 \beta_y \sin^2 \beta_z}} \quad (3.9)$$

$$FE_y = FE \frac{\sin \beta_y \cos \beta_z}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta_y \cos^2 \beta_z}} \quad (3.10)$$

$$FE_z = FE \frac{\cos \beta_y \sin \beta_z}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta_y \sin^2 \beta_z}} \quad (3.11)$$

onde,

$$FE = |\overrightarrow{FE}|.$$

As três equações acima podem ser simplificadas para pequenos ângulos  $\beta_y$  e  $\beta_z$  (Mallaco, 1987).

$$FE_x \cong FE \quad (3.12)$$

$$FE_y \cong FE \cdot \beta_y \quad (3.13)$$

$$FE_z \cong FE \cdot \beta_z \quad (3.14)$$

ou seja,

$$\overrightarrow{FE} = \begin{Bmatrix} FE_x \\ FE_y \\ FE_z \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} FE \\ FE \cdot \beta_y \\ FE \cdot \beta_z \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Esta simplificação é possível já que, em geral, as deflexões da tubeira ou do jato de saída de um lançador estão limitadas por um ângulo máximo de projeto, que em geral é pequeno.

### 3.2.1.2 Força Peso

A força peso atua no CG do veículo e aponta para o centro gravitacional da Terra. No sistema inercial SYS3 adotado, a força peso age no sentido contrário ao eixo  $X_3$  adotado, já que  $X_3$  aponta na direção do zênite. Este sentido é conhecido como nadir. Assim, a força peso é igual a:

$$\vec{P}_r = \begin{Bmatrix} -m \cdot g \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

onde,

$g$  é a aceleração gravitacional da Terra.

Porém, como comentado anteriormente, as equações de movimento serão desenvolvidas no sistema corpo SYS5 e, desta forma, a equação deve ser passada do sistema inercial SYS3 para o sistema corpo SYS5, utilizando para isso os ângulo de Euler (FIGURA 3.6).

Para se passar de um sistema para o outro, necessita-se multiplicar pela matriz de transformação de triedos. Para um vetor qualquer  $\vec{r}_r = \{X \ Y \ Z\}^T$  representado no sistema inercial e sua representação no sistema corpo  $\vec{r}_b = \{x \ y \ z\}^T$ , tem-se:

$$\vec{r}_b = T^{b/r} r_r \Rightarrow$$

$$T^{b/r} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \phi - \cos \theta \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \cos \phi & \cos \theta \sin \phi + \sin \theta \sin \psi \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \psi \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \psi \sin \phi \end{bmatrix}$$

onde,

$T^{b/r}$  é a matriz de transformação de um vetor no sistema inercial SYS3 para o sistema corpo SYS5.

Então, multiplicando-se  $T^{b/r}$  pela força peso (Equação (3.16)) no sistema inercial, obtém-se a força peso no sistema corpo:

$$\vec{P} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -mg(\cos \psi \cos \theta) \\ -mg(\sin \theta \sin \phi - \cos \theta \sin \psi \cos \phi) \\ -mg(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \psi \sin \phi) \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

onde,

$P_x, P_y, P_z$  são a projeção da força peso nos eixos do sistema corpo SYS5.

Para pequenos ângulos de Euler, a Equação (3.17) simplifica para:

$$\vec{P} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} -mg \\ +mg\Psi \\ -mg\theta \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Esta simplificação é possível, já que na maior parte do voo de um lançador, este permanece com o sistema corpo aproximadamente paralelo ao sistema inercial.

Mesmo considerando quando o lançador começa a inclinar para se alinhar com sua órbita final, deve-se levar em conta o fato do sistema inercial ser arbitrário. Se durante um instante onde o lançador começa ter ângulos de Euler maiores (onde a aproximação (3.18) começa não mais a ser válida), poder-se-ia adotar um novo sistema inercial SYS3', fixo em relação ao original SYS3 (sem velocidade linear ou aceleração angular relativa, apenas com novos sentidos dos eixos), porém paralelo ao sistema corpo naquele momento, fazendo com que os ângulos de Euler se anulem. Do ponto de vista da pilotagem, a resposta angular em relação ao sistema corpo é a mesma (a dinâmica não depende do sentido do sistema inercial adotado) e, com isso, simplifica as equações de movimento.

A Equação (3.18) é análoga à obtida através de uma perturbação em relação ao ponto de operação em qualquer instante de voo, resultando em  $\Delta\Psi$  e  $\Delta\theta$ .

Como exemplo, vamos adotar o modelo de um sistema massa-mola-amortecedor e desconsiderar a gravidade. Pela FIGURA 3.11, caso o sistema sofra perturbação tipo degrau unitário de força (no sentido de x mostrado), a resposta em relação ao sistema corpo x seria a mesma (em qualquer das duas

posições mostradas). O sistema teria a mesma resposta no tempo em relação ao sistema corpo  $x$ . Da mesma maneira acontece com a resposta de atitude do lançador, já que as equações são desenvolvidas no sistema corpo  $e$ , da mesma maneira, a escolha do sentido dos eixos do sistema inercial não afeta a resposta no tempo do sistema em relação ao sistema corpo.

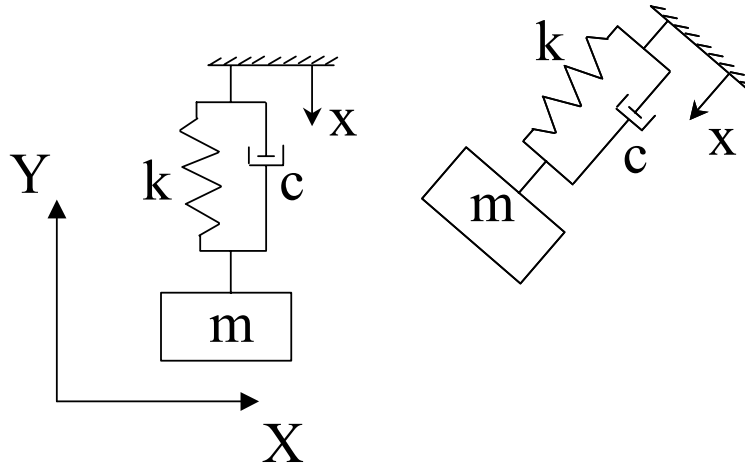


FIGURA 3.11: Sistema massa-mola-amortecedor.

Assim, pode-se considerar para análise da pilotagem, a força peso pela Equação (3.18), simplificando as equações de movimento.

### 3.2.1.3 Força Aerodinâmica

As forças aerodinâmicas surgem devido ao movimento relativo entre o veículo e o ar. Estas forças se tornam maiores com o aumento da velocidade, do desalinhamento do veículo em relação ao escoamento do ar (ângulo de ataque e derrapagem) e dependem de muitos outros parâmetros como número de Mach, geometria do lançador, temperatura, entre outros.

Os ângulos aerodinâmicos são conhecidos como ângulo de ataque  $\alpha$  (em torno do eixo y de arfagem) e derrapagem  $\beta$  (em torno do eixo z de guinada) e representam o ângulo formado entre o eixo de simetria do veículo (eixo x) e a direção do escoamento do ar, longe do corpo do veículo, conforme mostrado na FIGURA 3.12.

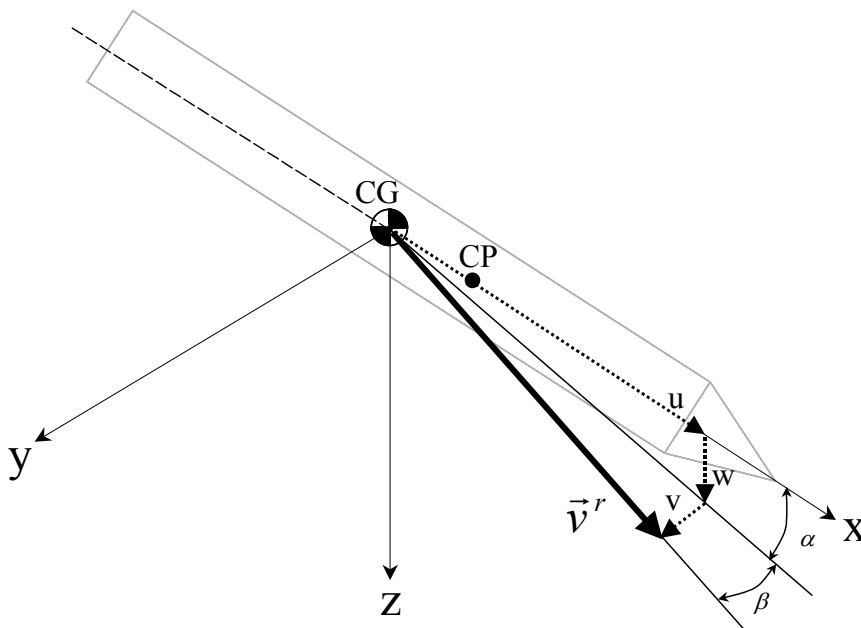


FIGURA 3.12: Ângulos aerodinâmicos.

Como as forças aerodinâmicas são avaliadas através de ensaios em túnel de vento para o centro de pressão, então não existem momentos aerodinâmicos em torno deste ponto, somente a força total equivalente (integração da distribuição de pressão ao longo do corpo do veículo).

Estas forças são adimensionalizadas, dividindo-se pela pressão dinâmica e uma certa área de referência, obtendo-se os coeficientes normais de sustentação  $C_n$  (direção  $y$  e  $z$  do sistema corpo) para os ângulos de ataque e derrapagem ( $\alpha$  e  $\beta$ ). Este coeficiente normal (ou transversal) varia praticamente linearmente com a variação de  $\alpha$  ou  $\beta$ , principalmente para pequenos ângulos.

O coeficiente de arrasto  $C_x$  (sentido  $-x$ , no sistema corpo), varia como uma função de 2ª ordem quando se varia  $\alpha$  e  $\beta$ . Quando estes ângulos são pequenos,  $C_x$  é aproximadamente constante.

Devido aos requisitos estruturais deve-se ter pequenos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  (quanto maiores forem estes ângulos, maiores serão as forças aerodinâmicas) e a condição nominal de operação é  $\alpha$  e  $\beta \cong 0$ . Assim, pode-se linearizar os coeficientes normais e de arrasto em relação à condição nominal de operação, obtendo-se

$$\begin{aligned}
 C_{n_\alpha} &= \left. \frac{dC_n}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \cong cte \\
 C_{n_\beta} &= \left. \frac{dC_n}{d\beta} \right|_{\beta=0} \cong cte \\
 C_x &= C_{x_0}(\alpha = 0, \beta = 0) \cong cte
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

onde,

$C_{n_\alpha}$  é a derivada do coeficiente normal em relação ao ângulo  $\alpha$ , em torno de  $\alpha=0$ ;

$C_{n_\beta}$  é a derivada do coeficiente normal em relação ao ângulo  $\beta$ , em torno de  $\beta=0$ ;

$C_{x_0}$  é o coeficiente de arrasto, em torno de  $\alpha=0$ ,  $\beta=0$ .

Além disso,  $Cn_\alpha = Cn_\beta$ , pois, em geral, os lançadores são simétricos. Com estes coeficientes linearizados, pode-se calcular as forças aerodinâmicas:

$$\vec{FA} = \begin{Bmatrix} FA_x \\ FA_y \\ FA_z \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} -Cx_0 \cdot Pdin \cdot Ar \\ -Cn_\beta \cdot Pdin \cdot Ar \cdot \beta \\ -Cn_\alpha \cdot Pdin \cdot Ar \cdot \alpha \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

onde,

$$Pdin \text{ é a pressão dinâmica, } = \frac{1}{2} \rho \left| \vec{v}^r - \vec{v}v^r \right|^2 ;$$

$\rho$  é a densidade do ar;

$\vec{v}v^r$  é a velocidade do vento em relação ao inercial, representado no sistema corpo;

$\left| \vec{v}^r - \vec{v}v^r \right|$  é magnitude da velocidade relativa entre o veículo e o ar (é calculado, fazendo-se a velocidade total do veículo em relação ao inercial, representado no sistema corpo, menos a velocidade do vento em relação ao inercial, representado no sistema corpo). Este é o termo que causa efetivamente a pressão dinâmica;

$Ar$  é a área de referência.

### 3.2.1.4 Equações de Movimento Linear

Assim, voltando à Equação (3.3):

$$\sum \vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}^r}{dt}$$

e substituindo a Equação (3.7) no primeiro termo, tem-se:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}^r}{dt} = \vec{FE} + \vec{P} + \vec{FA} \quad (3.21)$$

Substituindo agora as equações (3.6), (3.15) e (3.18) na equação acima (todas equações no sistema corpo), obtém-se

$$m \begin{Bmatrix} \dot{u} + qw - rv \\ \dot{v} + ru - pw \\ \dot{w} + pv - qu \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} FE \\ FE \cdot \beta_y \\ FE \cdot \beta_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -mg \\ +mg\Psi \\ -mg\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Cx_0 \cdot Pdin \cdot Ar \\ -Cn_\beta \cdot Pdin \cdot Ar \cdot \beta \\ -Cn_\alpha \cdot Pdin \cdot Ar \cdot \alpha \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Rearranjando a equação acima, obtém-se o conjunto das equações translacionais :

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = -\left(\frac{Cx_0 \cdot Pdin \cdot Ar}{m}\right) + \frac{FE}{m} - g + v \cdot r - w \cdot q \\ \dot{v} = -\left(\frac{Cn_\beta \cdot Pdin \cdot Ar}{m}\right) \beta + \frac{FE}{m} \cdot \beta_y + g\Psi + w \cdot p - u \cdot r \\ \dot{w} = -\left(\frac{Cn_\alpha \cdot Pdin \cdot Ar}{m}\right) \alpha + \frac{FE}{m} \cdot \beta_z - g\theta + u \cdot q - v \cdot p \end{cases} \quad (3.23)$$

Definindo os novos coeficientes:

$$Y_\beta = \left(\frac{Cn_\beta \cdot Pdin \cdot Ar}{m}\right); \quad Z_\alpha = \left(\frac{Cn_\alpha \cdot Pdin \cdot Ar}{m}\right); \quad Y_{\beta_y} = \frac{FE}{m}; \quad Z_{\beta_z} = \frac{FE}{m};$$

onde,

$Y_\beta$  é o coeficiente de aceleração linear em y em relação à  $\beta$ , medido em [m/s<sup>2</sup> / rad];

$Y_{\beta_y}$  é o coeficiente de aceleração linear em y em relação à  $\beta_y$ , medido em [m/s<sup>2</sup> / rad];

$Z_\alpha$  é o coeficiente de aceleração linear em z em relação à  $\alpha$ , medido em [m/s<sup>2</sup> / rad];

$Z_{\beta_z}$  é o coeficiente de aceleração linear em z em relação à  $\beta_z$ , medido em [m/s<sup>2</sup> / rad].

e substituindo em (3.23), tem-se



$$\dot{u} = -\left(\frac{Cx_0 \cdot Pdin \cdot Ar}{m}\right) + \frac{FE}{m} - g + v \cdot r - w \cdot q \quad (3.24)$$

$$\dot{v} = -Y_\beta \beta + Y_{\beta_y} \cdot \beta_y + g\Psi + w \cdot p - u \cdot r \quad (3.25)$$

$$\dot{w} = -Z_\alpha \alpha + Z_{\beta_z} \cdot \beta_z - g\theta + u \cdot q - v \cdot p \quad (3.26)$$

que são as três equações de movimento linear (ou translacionais) de um lançador.

### 3.2.2 Equações Rotacionais

Aplicando-se a 2ª lei de Newton para sistemas rotacionais, a somatória dos momentos é igual à variação temporal do momento angular. Novamente é utilizado o sistema do corpo e o ponto de referência para a somatória dos momentos é o próprio CG.

$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt} (\vec{I} \cdot \vec{\Omega}^{b/r}) \quad (3.27)$$

onde,

$\sum \vec{M}$  é a somatória dos momentos que age no CG;

$\vec{I}$  é a matriz (ou tensor) de inércia em relação ao CG, nos eixos do sistema corpo;

$\vec{\Omega}^{b/r}$  é a velocidade angular total do sistema corpo em relação ao sistema inercial, representado no sistema corpo (Equação (3.4) ).

Expandindo o segundo termo e lembrando que o vetor  $\vec{\Omega}^{b/r}$  está representado no sistema corpo,

$$\frac{d}{dt} (\vec{I} \cdot \vec{\Omega}^{b/r}) = \frac{\delta}{\delta t} (\vec{I} \cdot \vec{\Omega}^{b/r}) + \vec{\Omega}^{b/r} \times (\vec{I} \cdot \vec{\Omega}^{b/r}) \quad (3.28)$$

onde,

$\frac{\delta}{\delta t}(\vec{I} \cdot \vec{\Omega}^{b/r})$  é a derivada relativa de  $\vec{I} \cdot \vec{\Omega}^{b/r}$ , que representa a variação temporal em termos de magnitude;

$\vec{\Omega}^{b/r} \times (\vec{I} \cdot \vec{\Omega}^{b/r})$  é a variação de  $\vec{I} \cdot \vec{\Omega}^{b/r}$  em termos de direção, que surge devido a rotação do sistema corpo SYS5 em relação ao sistema inercial (veja Blakelock, 1991 apêndice A).

Expandindo ainda mais, a equação acima resulta:

$$\frac{d}{dt}(\vec{I} \cdot \vec{\Omega}^{b/r}) = \frac{\delta}{\delta t}(\vec{I}) \cdot \vec{\Omega}^{b/r} + \vec{I} \frac{\delta}{\delta t}(\vec{\Omega}^{b/r}) + \vec{\Omega}^{b/r} \times (\vec{I} \cdot \vec{\Omega}^{b/r}) \quad (3.29)$$

Os lançadores são, em geral, quase simétricos e, portanto, a matriz de inércia  $\vec{I}$  pode ser considerada diagonal (possui somente momentos de inércia, produtos de inércia são nulos) e os momentos de inércia são os próprios momentos principais de inércia.

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

onde,

$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  são os momentos principais de inércia nos eixos  $X_5 Y_5 Z_5$ .

Expandindo a Equação (3.29), obtém-se, por fim, o segundo termo da Equação (3.27):

$$\frac{d}{dt}(\vec{I} \cdot \vec{\Omega}) = \begin{Bmatrix} \dot{I}_{xx} p \\ \dot{I}_{yy} q \\ \dot{I}_{zz} r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} I_{xx} \dot{p} \\ I_{yy} \dot{q} \\ I_{zz} \dot{r} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (I_{zz} - I_{yy}) \cdot q \cdot r \\ (I_{xx} - I_{zz}) \cdot p \cdot r \\ (I_{yy} - I_{xx}) \cdot p \cdot q \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

Para a somatória de momentos, tem-se:

$$\sum \vec{M} = \vec{MA} + \vec{MAA} + \vec{TC} + \vec{MAJ} \quad (3.32)$$

onde,

$\overrightarrow{MA}$  é o momento aerodinâmico no CG, que surge devido à distância existente em  $X_5$  do CP ao CG (esta distância é conhecida como margem estática);

$\overrightarrow{MAA}$  é o momento de amortecimento aerodinâmico no CG, que surge devido às velocidades angulares  $p, q, r$  do veículo no ar (efeito viscoso);

$\overrightarrow{TC}$  é o torque de controle no CG que surge devido à deflexão da tubeira ou inclinação do jato e é responsável por manobrar o veículo;

$\overrightarrow{MAJ}$  é o momento de amortecimento de jato, que surge devido à variação de massa do veículo em conjunto com as velocidades angulares (veja Cornelisse (1979)).

### 3.2.2.1 Momento Aerodinâmico $\overrightarrow{MA}$

O momento aerodinâmico surge do fato da resultante de força aerodinâmica não estar na mesma posição  $X_5$  do CG (assumindo que o CG e CP estão no eixo de simetria do lançador). Assim, este momento é dado pelo produto vetorial do raio do CG para o CP e da força aerodinâmica.

$$\overrightarrow{MA} = \begin{Bmatrix} MA_x \\ MA_y \\ MA_z \end{Bmatrix} = r_{CG-CP} \times \overrightarrow{FA} = \begin{Bmatrix} l_a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} FA_x \\ FA_y \\ FA_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -FA_z \cdot l_a \\ +FA_y \cdot l_a \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

onde,

$MA_x, MA_y, MA_z$  é a projeção do momento aerodinâmico nos 3 eixos do sistema corpo,  $X_5Y_5Z_5$ ;

$l_a$  é o braço de alavanca aerodinâmico (também conhecido como margem estática) definida na FIGURA 3.13. Esta variável é positiva para um lançador naturalmente instável (CG atrás do CP, como mostrado na figura).

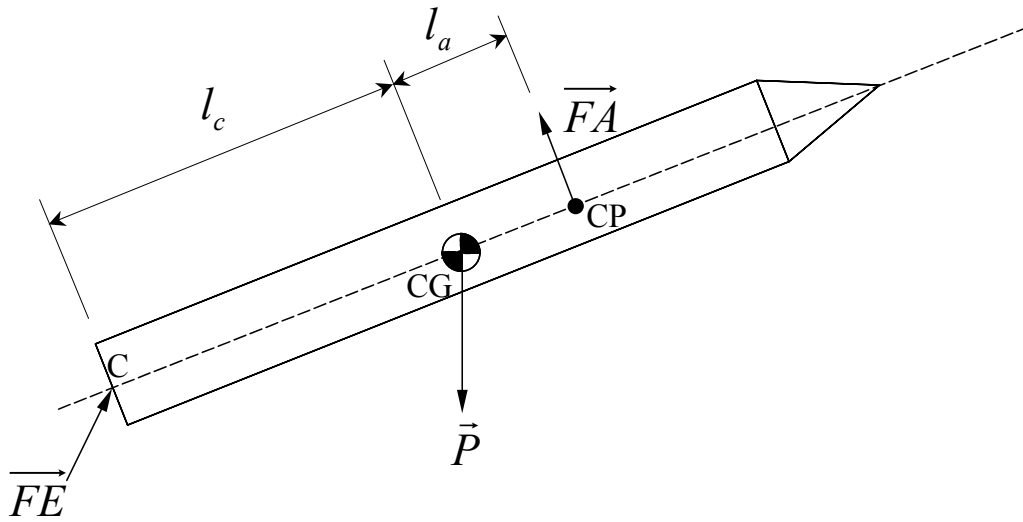


FIGURA 3.13: Braço de alavanca da força aerodinâmica ( $l_a$ ) e de controle ( $l_c$ ).

Substituindo a Equação (3.20) na Equação (3.33), resulta em:

$$\overline{MA} = \begin{Bmatrix} MA_x \\ MA_y \\ MA_z \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} 0 \\ +Cn_\alpha \cdot Pdin \cdot Ar \cdot \alpha \cdot l_a \\ -Cn_\beta \cdot Pdin \cdot Ar \cdot \beta \cdot l_a \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

### 3.2.2.2 Momento de Amortecimento Aerodinâmico $\overline{MAA}$

Este momento é consequência da rotação do veículo em relação ao CG em um meio viscoso (neste caso o ar) e é maior, quanto maior for a rotação angular. Quando o veículo sai da atmosfera, este momento desaparece.

Quando a aeronave rotaciona com uma velocidade de arfagem  $q$ , surge um momento no próprio eixo de arfagem  $y$  (ou  $Y_5$ ). Este momento pode ser adimensionalizado dividindo-o por uma área de referência, pela pressão dinâmica e por um braço de referência. Desta maneira, define-se os 3 coeficientes de momento  $CL$ ,  $CM$ ,  $CN$  nos 3 eixos do corpo  $xyz$  (ou  $X_5Y_5Z_5$ ), respectivamente.

Como estes momentos variam praticamente de forma linear com a velocidade angular do veículo, então pode-se definir a derivada destes momentos em relação às velocidades angulares. Porém, as velocidades angulares têm

unidade de rad/s e prefere-se calcular as derivadas dos momentos em função de uma variável adimensional. As variáveis adimensionais das rotações angulares adotadas nos três eixos são:

$$p' = \frac{p \cdot l_r}{2 \cdot \left| \vec{v}^r - v\vec{v}^r \right|}; \quad q' = \frac{q \cdot l_r}{2 \cdot \left| \vec{v}^r - v\vec{v}^r \right|}; \quad r' = \frac{r \cdot l_r}{2 \cdot \left| \vec{v}^r - v\vec{v}^r \right|}$$

onde,

$p'$ ,  $q'$ ,  $r'$  são as velocidades angulares adimensionalizadas nos eixos  $X_5Y_5Z_5$ , respectivamente;

$l_r$  é o comprimento de referência adotado;

$\left| \vec{v}^r - v\vec{v}^r \right|$  é a magnitude da velocidade relativa entre o veículo e o ar (é calculada pela diferença entre a velocidade total do veículo em relação ao inercial, representada no sistema corpo, e a velocidade do vento em relação ao inercial, representada no sistema corpo).

Definindo-se as derivadas em relação às velocidades angulares adimensionalizadas, têm-se

$$CL_p = \left. \frac{dCL}{dp'} \right|_{p'=0}; \quad CM_q = \left. \frac{dCM}{dq'} \right|_{q'=0}; \quad CN_r = \left. \frac{dCN}{dr'} \right|_{r'=0}$$

onde,

$CL$ ,  $CM$ ,  $CN$  são os coeficientes de momento aerodinâmico nos eixo  $X_5Y_5Z_5$ , respectivamente.

Assim, pode-se calcular o momento de amortecimento aerodinâmico como

$$\vec{MAA} = \begin{Bmatrix} MAA_x \\ MAA_y \\ MAA_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -CL_p \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_r \cdot p' \\ -CM_q \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_r \cdot q' \\ -CN_r \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_r \cdot r' \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Nota-se que os momentos de amortecimento de jato surgem no sentido contrário à rotação, isto é, quando  $p$ ,  $q$ ,  $r$  são positivos, os seus respectivos

momentos são negativos, no sentido de diminuir a velocidade de rotação, e funcionando como um amortecedor rotacional viscoso.

Substituindo  $p'$ ,  $q'$ ,  $r'$  na Equação (3.35) obtêm-se

$$\overrightarrow{MAA} = \begin{Bmatrix} MAA_x \\ MAA_y \\ MAA_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-CL_p \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_r^2}{2 \cdot |\overrightarrow{v^r} - v\overrightarrow{v^r}|} p \\ \frac{-CM_q \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_r^2}{2 \cdot |\overrightarrow{v^r} - v\overrightarrow{v^r}|} q \\ \frac{-CN_r \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_r^2}{2 \cdot |\overrightarrow{v^r} - v\overrightarrow{v^r}|} r \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

### 3.2.2.3 Torque de Controle $\overrightarrow{TC}$

O torque de controle surge da deflexão da tubeira ou inclinação equivalente dos jatos de saída, que provoca um momento em relação ao CG do veículo. Este momento é calculado pelo produto vetorial do vetor posição do CG até o ponto de aplicação da força de empuxo (ponto C, veja FIGURA 3.13) com o vetor força de empuxo, ou seja:

$$\overrightarrow{TC} = \begin{Bmatrix} TC_x \\ TC_y \\ TC_z \end{Bmatrix} = r_{CG-C} \times \overrightarrow{FE} = \begin{Bmatrix} l_c \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} FE_x \\ FE_y \\ FE_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -FE_z \cdot l_c \\ +FE_y \cdot l_c \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

onde,

$l_c$  é o braço de alavanca do controle, que é adotado como negativo (veja FIGURA 3.13).

Substituindo a Equação (3.15) na Equação (3.37):

$$\overrightarrow{TC} = \begin{Bmatrix} TC_x \\ TC_y \\ TC_z \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} 0 \\ -FE \cdot \beta_z \cdot l_c \\ +FE \cdot \beta_y \cdot l_c \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

### 3.2.2.4 Momento de Amortecimento de Jato $\overline{MAJ}$

Este momento surge para corpos na qual a variação instantânea da massa é considerável. Para mais detalhes e demonstração veja Cornelisse (1979). Este momento é dado por:

$$\overline{MAJ} = \dot{m} \cdot \vec{r}_e \times (\vec{\Omega}^{b/r} \times \vec{r}_e) \quad (3.39)$$

onde,

$\vec{r}_e$  é o raio do CG até o ponto de saída dos gases;

$\dot{m}$  é a derivada instantânea da massa (valor negativo).

Expandindo o termo  $\vec{\Omega}^{b/r} \times \vec{r}_e$

$$\vec{\Omega}^{b/r} \times \vec{r}_e = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_e \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ +r \cdot x_e \\ -q \cdot x_e \end{Bmatrix}$$

onde,

$x_e$  é a distância do CG ao ponto de saída dos gases, e por aproximação,

$x_e \cong l_c$  (negativo).

Substituindo este resultado na Equação (3.39), obtém-se o momento de amortecimento de jato:

$$\overline{MAJ} = \begin{Bmatrix} MAJ_x \\ MAJ_y \\ MAJ_z \end{Bmatrix} = \dot{m} \begin{Bmatrix} x_e \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ +r \cdot x_e \\ -q \cdot x_e \end{Bmatrix} = \dot{m} \begin{Bmatrix} 0 \\ +q \cdot x_e^2 \\ +r \cdot x_e^2 \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

### 3.2.2.5 Equações de Movimento Angular

Assim, voltando-se à Equação (3.27) e substituindo a Equação (3.32):

$$\frac{d}{dt}(\vec{I} \cdot \vec{\Omega}) = \sum \vec{M} = \overline{MA} + \overline{MAA} + \overline{TC} + \overline{MAJ} \quad (3.41)$$

Substituindo a (3.31) na (3.41), têm-se:

$$\begin{Bmatrix} \dot{I}_{xx} p \\ \dot{I}_{yy} q \\ \dot{I}_{zz} r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} I_{xx} \dot{p} \\ I_{yy} \dot{q} \\ I_{zz} \dot{r} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (I_{zz} - I_{yy}) \cdot q \cdot r \\ (I_{xx} - I_{zz}) \cdot p \cdot r \\ (I_{yy} - I_{xx}) \cdot p \cdot q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} MA_x \\ MA_y \\ MA_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} MAA_x \\ MAA_y \\ MAA_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} TC_x \\ TC_y \\ TC_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} MAJ_x \\ MAJ_y \\ MAJ_z \end{Bmatrix}$$

e finalmente substituindo as Equações (3.34), (3.36), (3.38) e (3.40) na Equação (3.41), obtêm-se:

$$\dot{I}_{xx} p + I_{xx} \dot{p} + (I_{zz} - I_{yy}) \cdot q \cdot r = \frac{-CL_p \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_r^2}{2 \cdot \left| \vec{v}^r - v\vec{v}^r \right|} p \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_{yy} q + I_{yy} \dot{q} + (I_{xx} - I_{zz}) \cdot p \cdot r = & Cn_\alpha \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_a \cdot \alpha + \\ & + \frac{(-CM_q) \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_r^2}{2 \cdot \left| \vec{v}^r - v\vec{v}^r \right|} q - FE \cdot \beta_z \cdot l_c + \dot{m} \cdot x_e^2 \cdot q \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_{zz} r + I_{zz} \dot{r} + (I_{yy} - I_{xx}) \cdot p \cdot q = & -Cn_\beta \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_a \cdot \beta + \\ & + \frac{(-CN_r) \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_r^2}{2 \cdot \left| \vec{v}^r - v\vec{v}^r \right|} r + FE \cdot \beta_y \cdot l_c + \dot{m} \cdot x_e^2 \cdot r \end{aligned} \quad (3.44)$$

Rearranjando as três equações acima obtêm-se:

$$\dot{p} = - \left( \frac{\dot{I}_{xx}}{I_{xx}} + \frac{CL_p \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_r^2}{2 \cdot \left| \vec{v}^r - v\vec{v}^r \right| \cdot I_{xx}} \right) p + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} q \cdot r \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \dot{q} = & - \left( \frac{\dot{I}_{yy}}{I_{yy}} + \frac{CM_q \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_r^2}{2 \cdot \left| \vec{v}^r - v\vec{v}^r \right| \cdot I_{yy}} - \frac{\dot{m} \cdot x_e^2}{I_{yy}} \right) q + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} p \cdot r + \\ & + \frac{Cn_\alpha \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_a}{I_{yy}} \cdot \alpha - \frac{FE \cdot l_c}{I_{yy}} \beta_z \end{aligned} \quad (3.46)$$



$$\dot{r} = \left( \frac{\dot{I}_{zz}}{I_{zz}} + \frac{CN_r \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_r^2}{2 \cdot \left| \vec{v}^r - v\vec{v}^r \right| \cdot I_{zz}} - \frac{\dot{m} \cdot x_e^2}{I_{zz}} \right) r + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} p \cdot q - \frac{Cn_\beta \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_a}{I_{zz}} \cdot \beta + \frac{FE \cdot l_c}{I_{zz}} \beta_y \quad (3.47)$$

Definindo as novas variáveis,

$$L_p = \left( \frac{\dot{I}_{xx}}{I_{xx}} + \frac{CL_p \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_r^2}{2 \cdot \left| \vec{v}^r - v\vec{v}^r \right| \cdot I_{xx}} \right); \quad M_q = \left( \frac{\dot{I}_{yy}}{I_{yy}} + \frac{CM_q \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_r^2}{2 \cdot \left| \vec{v}^r - v\vec{v}^r \right| \cdot I_{yy}} - \frac{\dot{m} \cdot x_e^2}{I_{yy}} \right);$$

$$N_r = \left( \frac{\dot{I}_{zz}}{I_{zz}} + \frac{CN_r \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_r^2}{2 \cdot \left| \vec{v}^r - v\vec{v}^r \right| \cdot I_{zz}} - \frac{\dot{m} \cdot x_e^2}{I_{zz}} \right);$$

$$M_\alpha = \frac{Cn_\alpha \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_a}{I_{yy}}; \quad N_\beta = \frac{Cn_\beta \cdot Pdin \cdot Ar \cdot l_a}{I_{zz}}$$

$$M_{\beta_z} = \frac{FE \cdot l_c}{I_{yy}}; \quad N_{\beta_y} = \frac{FE \cdot l_c}{I_{zz}}$$

onde,

$L_p$  é o coeficiente de aceleração angular de rolamento em relação à  $p$ , medido em  $[\text{rad/s}^2 / \text{rad/s}]$ ;

$M_q$  é o coeficiente de aceleração angular de arfagem em relação à  $q$ , medido em  $[\text{rad/s}^2 / \text{rad/s}]$ ;

$N_r$  é o coeficiente de aceleração angular de guinada em relação à  $r$ , medido em  $[\text{rad/s}^2 / \text{rad/s}]$ ;

$M_\alpha$  é o coeficiente de aceleração angular de arfagem em relação à  $\alpha$ , medido em  $[\text{rad/s}^2 / \text{rad}]$ ;

$M_{\beta_z}$  é o coeficiente de aceleração angular de arfagem em relação à  $\beta_z$ , medido em [rad/s<sup>2</sup> / rad];

$N_{\beta}$  é o coeficiente de aceleração angular de guinada em relação à  $\beta$ , medido em [rad/s<sup>2</sup> / rad];

$N_{\beta_y}$  é o coeficiente de aceleração angular de guinada em relação à  $\beta_y$ , medido em [rad/s<sup>2</sup> / rad];

e substituindo nas equações (3.45), (3.46) e (3.47):

$$\dot{p} = -L_p \cdot p + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} q \cdot r \quad (3.48)$$

$$\dot{q} = -M_q \cdot q + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} p \cdot r + M_\alpha \cdot \alpha - M_{\beta_z} \cdot \beta_z \quad (3.49)$$

$$\dot{r} = -N_r \cdot r + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} p \cdot q - N_\beta \cdot \beta + N_{\beta_y} \cdot \beta_y \quad (3.50)$$

que são as três equações de movimento angular (ou rotacionais) de um lançador.

### 3.3 Função de Transferência

A função de transferência de atitude (utilizada para a pilotagem) é obtida em termos das equações de arfagem (*pitch*, eixo y). O desenvolvimento da função de transferência para o eixo de guinada (*yaw*, eixo z) é análogo e não é apresentado.

Para a obtenção da função de transferência de atitude, alguns requisitos e hipóteses precisam ser consideradas para que as equações sejam simplificadas permitindo por fim a obtenção da TF (função de transferência ou *transfer function*) desejada.

#### 1. Requisito: perfil de velocidade $u$

Um dos principais requisitos de um lançador, já estabelecido durante a fase de anteprojetado, é a órbita na qual se deseja colocar a carga paga. Uma vez

determinada a órbita final, estabelece-se a trajetória nominal, com base em algum critério (mínimo combustível, por exemplo), da base de lançamento escolhida até a órbita final.

Determinada esta trajetória nominal, pode-se calcular, assim, a variação do ângulo de atitude  $\theta$  ao longo do tempo e também do perfil de velocidade tangencial para esta trajetória, como pode ser visto na FIGURA 3.14.

Variações nesta trajetória de referência causam modificações desprezíveis no perfil de velocidade  $u(t)$  (veja hipótese 3, mais adiante).

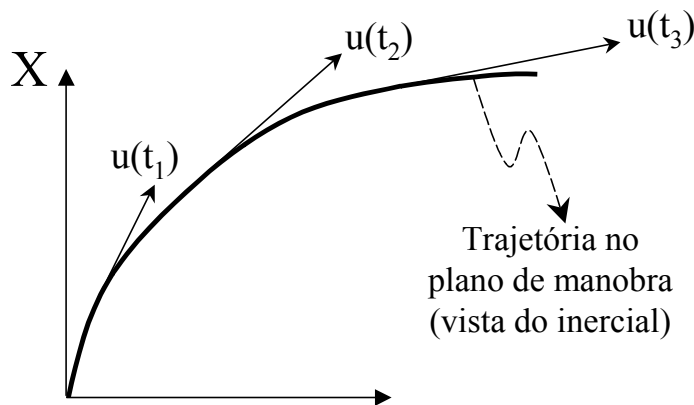


FIGURA 3.14: Perfil de velocidade típico de um lançador, visto do inercial no plano de manobra.

Como consequência a Equação (3.24) de  $\dot{u}$  desaparece, isto é,  $u$  não é mais variável de estado e sim parâmetro independente.

## 2. Requisito: $p \cong 0$ (sem rolamento)

Este requisito especifica que a velocidade de rolamento deve ser nula ou aproximadamente nula durante todo vôo. Este requisito é estabelecido pois facilita a manobrabilidade do lançador. A existência de uma velocidade angular  $p$  implica em um efeito giroscópico e um acoplamento aerodinâmico entre os eixos de arfagem e guinada, o que cria um acoplamento dinâmico das equações angulares nos eixos  $y$  e  $z$ .

Um rolamento pode ser importante nos primeiros instantes de vôo para alinhar o lançador com o seu plano de manobra. Como durante este período

de tempo a pressão aerodinâmica é muito pequena, então o efeito de acoplamento aerodinâmico é praticamente nulo. Deve-se evitar realizar qualquer tipo de movimento da tubeira no plano de arfagem/guinada até o fim deste rolamento inicial.

Assim, como normalmente não é preciso que um lançador faça manobras de rolamento durante a maior parte do vôo, então este requisito se torna natural e necessário.

3. Hipótese:  $\left| \vec{v}^r - v\vec{v}^r \right| \cong u$

A magnitude da velocidade relativa do veículo em relação ao ar  $|\vec{v}^r - v\vec{v}^r|$  é aproximadamente o próprio termo  $u$ , pois as outras componentes nos eixos  $y$  e  $z$  ( $v$  e  $w$ , respectivamente) são relativamente pequenas e  $u$  é bem maior que os ventos perturbativos. Esta hipótese só não é válida nos primeiros instantes de vôo, onde a velocidade total do lançador é ainda pequena.

Em relação a velocidade total do lançador no eixo  $x$ , os ventos têm magnitude muito pequena (por isso, a simplificação acima), porém estes devem ser levados em conta (não podem ser considerados nulos) pois causam momentos (principalmente de arfagem e guinada) e interferem na atitude do lançador, ou seja, não são desprezíveis nos eixo  $y$  e  $z$ .

A hipótese aqui descrita simplifica as equações onde o termo  $|\vec{v}^r - v\vec{v}^r|$  aparece explicitamente.

4. Hipótese:  $\alpha \cong \frac{w}{u}$ ;  $\beta \cong \frac{v}{|\vec{v}^r|}$

Da FIGURA 3.12, as seguintes relações podem ser obtidas:

$$\tan \alpha = \frac{w}{u}; \quad \text{sen } \beta = \frac{v}{|\vec{v}^r|}$$

Como já foi citado anteriormente, os ângulos de ataque e derrapagem são pequenos devido a requisitos estruturais. Assim, as relações acima simplificam para

$$\alpha \cong \frac{w}{u}; \quad \beta \cong \frac{v}{|\vec{v}^r|}$$

Mais uma vez, esta hipótese torna as equações de movimento mais simples.

5. Hipótese:  $q \cong \dot{\theta}$ ;  $\dot{q} \cong \ddot{\theta}$

A relação entre as velocidades angulares  $p, q, r$  e os ângulos de Euler adotados é obtido por Mallaco (1987) e pode ser deduzida diretamente da projeção cartesiana:

$$\begin{cases} p \\ q \\ r \end{cases} = \begin{bmatrix} \sin \psi & 0 & 1 \\ \cos \phi \cos \psi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi \cos \psi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{cases} \quad (3.51)$$

Para pequenos ângulos de Euler (veja comentários na seção 3.2.1.2, força peso), as equações acima simplificam para

$$\begin{cases} p \cong \dot{\phi} \\ q \cong \dot{\theta} \\ r \cong \dot{\psi} \end{cases} \quad (3.52)$$

E como consequência,

$$\begin{cases} \dot{p} \cong \ddot{\phi} \\ \dot{q} \cong \ddot{\theta} \\ \dot{r} \cong \ddot{\psi} \end{cases} \quad (3.53)$$

Isto significa que para pequenos ângulos de Euler em torno do ponto de operação analisado, as velocidades angulares medidas no sistema corpo são aproximadamente iguais às velocidades angulares dos ângulos de Euler e analogamente, as acelerações também.

6. Hipótese: a variação dos parâmetros é aproximadamente nula, para um intervalo de tempo  $\Delta t$

Os coeficientes das equações lineares (3.24), (3.25) e (3.26) e das equações angulares (3.48), (3.49) e (3.50) variam ao longo do tempo devido às mudanças dos parâmetros de massa (massa, momentos de inércia e posição do CG variam com a saída dos gases de escape) e parâmetros aerodinâmicos (variação dos coeficientes com número de Mach e altitude).

Aplicando a técnica de pólos congelados, estes parâmetros podem ser considerados constantes dentro de um certo intervalo de tempo, inclusive a velocidade do veículo  $u$ . A determinação deste intervalo depende da dinâmica do lançador.

Além disso, a variação dos parâmetros de massa/aerodinâmicos/velocidade tendem a se compensar, mantendo as equações de movimento constantes dentro deste intervalo de tempo.

Esta hipótese permite a aplicação da transformada de Laplace nas equações de movimento para um certo intervalo de tempo, pois esta transformada somente pode ser utilizada para sistemas lineares e invariantes no tempo.

Assim, valendo-se do requisito 1., as equações para o eixo de arfagem são:

Translação:

$$\dot{w} = -Z_{\alpha} \alpha + Z_{\beta_z} \cdot \beta_z - g\theta + u \cdot q - v \cdot p \quad (3.54)$$

Rotação:

$$\dot{q} = -M_q \cdot q + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} p \cdot r + M_{\alpha} \cdot \alpha - M_{\beta_z} \cdot \beta_z \quad (3.55)$$

Aplicando o requisito 2. e as hipóteses 3. e 4., as 2 Equações acima simplificam para:

$$\begin{cases} \dot{q} = -M_q \cdot q + M_\alpha \cdot \frac{w}{u} - M_{\beta_z} \cdot \beta_z \\ \dot{w} = -Z_\alpha \cdot \frac{w}{u} + Z_{\beta_z} \cdot \beta_z - g\theta + u \cdot q \end{cases} \quad (3.56)$$

Como pela hipótese 5.  $q \cong \dot{\theta}$  e  $\dot{q} \cong \ddot{\theta}$ , então

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = -M_q \cdot \dot{\theta} + M_\alpha \cdot \frac{w}{u} - M_{\beta_z} \cdot \beta_z \\ \dot{w} = -Z_\alpha \cdot \frac{w}{u} + Z_{\beta_z} \cdot \beta_z - g\theta + u \cdot \dot{\theta} \end{cases} \quad (3.57)$$

Valendo-se da hipótese 6., aplica-se a transformada de Laplace para condições iniciais nulas:

$$\begin{cases} s^2\theta(s) = -M_q \cdot s\theta(s) + \frac{M_\alpha}{u} \cdot W(s) - M_{\beta_z} \cdot \beta_z(s) \\ sW(s) = -\frac{Z_\alpha}{u} \cdot W(s) + Z_{\beta_z} \cdot \beta_z(s) - g\theta(s) + u \cdot s\theta(s) \end{cases} \quad (3.58)$$

Isolando-se  $W(s)$  na Equação (3.58b):

$$W(s) = \left( \frac{1}{s + \frac{Z_\alpha}{u}} \right) [Z_{\beta_z} \cdot \beta_z(s) - g\theta(s) + u \cdot s\theta(s)] \quad (3.59)$$

Substituindo na Equação (3.58a) e rearranjando:

$$\frac{\theta(s)}{\beta_z(s)} = \frac{(-M_{\beta_z})s + \left( \frac{-M_{\beta_z}Z_\alpha}{u} + \frac{M_\alpha Z_{\beta_z}}{u} \right)}{s^3 + \left( \frac{Z_\alpha}{u} + M_q \right)s^2 + \left( \frac{Z_\alpha M_q}{u} - M_\alpha \right)s + \left( \frac{M_\alpha g}{u} \right)} \quad (3.60)$$

Esta é a função de transferência do modelo simplificado de corpo rígido do eixo de arfagem (eixo y).

Considerando mais algumas hipóteses, pode-se obter um modelo mais simplificado da função de transferência (3.60).

7. Hipótese:  $u \gg$  coeficientes angulares

Alguns instantes após o lançamento, a velocidade do lançador cresce rapidamente para valores altos. A consequência deste fato, é que os termos divididos por  $u$  na Equação (3.60) se tornam praticamente nulos.

8. Hipótese:  $M_q \ll M_\alpha$  (fase atmosférica) e  $M_q \cong 0$  (fase não-atmosférica)

Durante a fase atmosférica, em geral o termo  $M_q$  é muito menor que o termo  $M_\alpha$  e na fase não-atmosférica,  $M_q$  tende a zero. Desta forma, durante as duas fases o termo  $M_q$  pode ser desconsiderado (esta hipótese também foi comprovada com simulações no tempo, onde as equações com e sem  $M_q$  obtiveram praticamente a mesma resposta no tempo).

Com base nas hipóteses 7. e 8., a Equação (3.60) do modelo simplificado se torna:

$$\frac{\theta(s)}{\beta_z(s)} = \frac{-M_{\beta_z}}{s^2 - M_\alpha} \quad (3.61)$$

Esta é a função de transferência do modelo mais simplificado de corpo rígido (sendo chamado daqui por diante de modelo +simplificado) do eixo de arfagem (eixo y).



## CAPÍTULO 4

### METODOLOGIA

Neste capítulo são apresentadas a arquitetura de controle adotada para análise dos ganhos do controlador e os dois métodos utilizados. O primeiro é o método que já vinha sendo utilizado, denominado método LQ (*Linear Quadratic*) e o segundo é o novo método proposto.

Observar que neste trabalho, o termo “sobresinal” é equivalente ao termo *overshoot* em inglês.

#### 4.1 Arquitetura de Controle

A arquitetura de controle utilizada (Ramos et al., 2003) é proporcional-integral com realimentação de velocidade devido a sua grande versatilidade e uso em diversas aplicações. O ganho proporcional corrige desvios de atitude em cada instante de tempo, o ganho integral garante que o erro estacionário à entrada rampa seja constante. O controlador adotado com o modelo de corpo rígido +simplificado, pode ser visto na FIGURA 4.1.

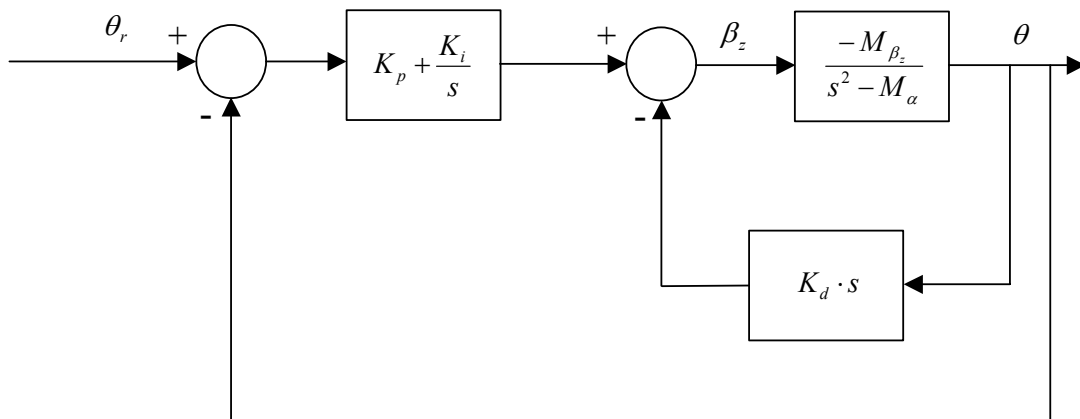


FIGURA 4.1: Modelo +simplificado com controle PI e realimentação velocidade.

Neste trabalho, o modelo simplificado (e o + simplificado) é considerado após 5 segundos de decolagem pois no *lift-off* usa-se um outro algoritmo. O projeto do controlador deve levar em conta o modelo +simplificado, porém os ganhos devem ser testados posteriormente com o modelo simplificado.

Sendo a arquitetura de controle fixa e considerando que o sistema é variante ao longo do voo (invariante dentro de um certo intervalo de tempo) então os valores dos ganhos do controlador são escalonados ao longo do tempo (*gain scheduling*) para que o foguete cumpra os diversos requisitos de estabilidade e performance determinados para a missão.

Assim, ao longo de todo voo realiza-se a análise da resposta em atitude a cada intervalo onde o lançador é considerado invariante e, como os pólos e zeros estão congelados neste intervalo, pode-se projetar os ganhos do controlador.

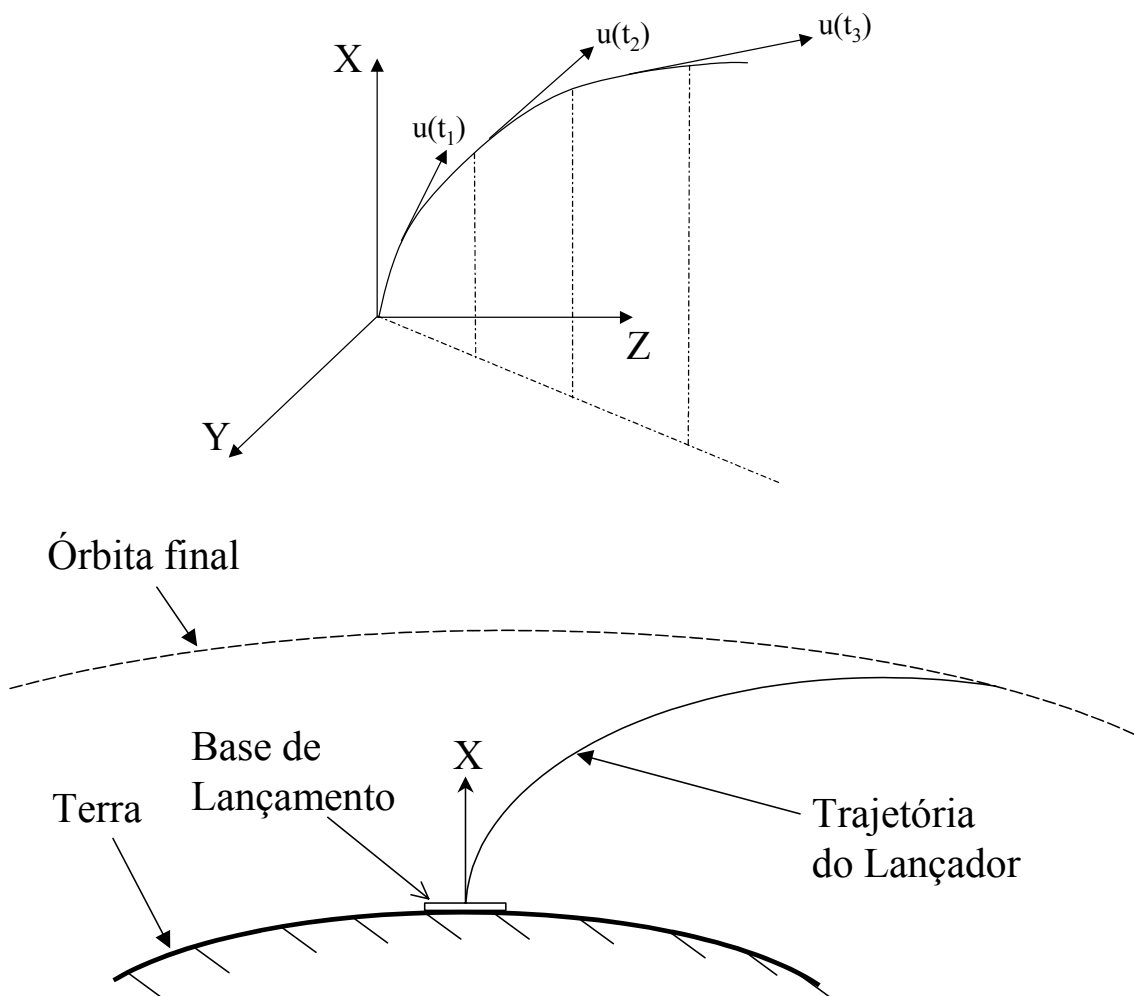


FIGURA 4.2: Trajetória do CG (qualitativa) em relação ao inercial, vista em perspectiva e no plano de manobra.

Considerando a trajetória desde a base de lançamento até a órbita final, pode-se considerar que esta trajetória é aproximadamente uma elipse ou uma parábola ou uma hipérbole (um formato que se aproxime de uma destas três curvas), como pode ser visto na FIGURA 4.2.

Porém a trajetória real vagamente se aproxima de uma das três curvas citadas, já que as incertezas presentes (aerodinâmicas e de projeto do lançador) em conjunto com os ventos, geram uma trajetória que não pode ser descrita por uma curva analítica (elipse, parábola ou hipérbole). O perfil de projeto utilizado é formado por diversos perfis rampa, como pode ser visto de maneira qualitativa na FIGURA 4.3. Assim o controle integrador é necessário para garantir erro constante à entrada rampa, já que esta é a entrada típica do sistema (garante erro zero à entrada degrau).

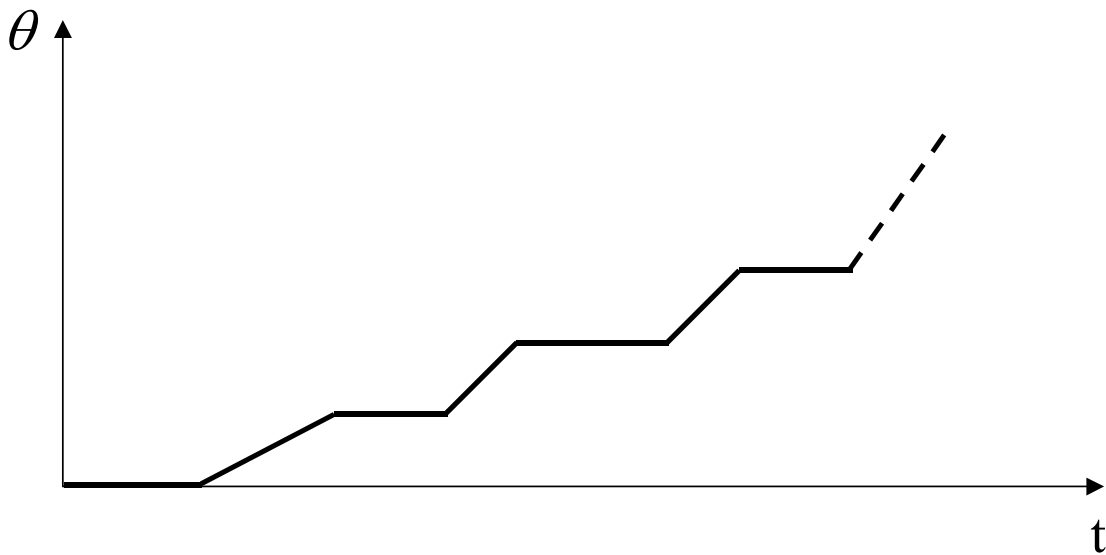


FIGURA 4.3: Perfil de atitude ao longo do tempo (qualitativo).

O ganho proporcional junto com o integrador conduz à introdução de um zero no sistema de malha fechada, para compensar o efeito instabilizador que o pólo do integrador tem na origem.

Por sua vez o ganho derivativo é utilizado para se ter um desempenho satisfatório durante o transiente (atenuação) e é colocado como uma malha de

realimentação de velocidade (separada da realimentação de posição). Esta escolha tem basicamente duas razões.

A primeira considera que caso este termo derivativo fosse introduzido no mesmo local (canal direto) do PI (proporcional-integral) e a entrada fosse um degrau unitário de atitude em  $t$ , este termo calcularia um impulso unitário neste instante (derivada do degrau unitário, é um impulso unitário em  $t$ ), provocando um comando abrupto e de grande intensidade. Assim, o posicionamento deste em uma malha interna evita este problema, já que o lançador funciona como um filtro para esta entrada abrupta, evitando comandos excessivos pelo termo derivativo.

A segunda razão leva em conta o fato da rotação angular de arfagem do corpo  $q$  ser a saída dos sensores de rotação (girômetro). Caso o termo derivativo estivesse na malha de posição, seria necessário converter esta saída dos sensores para o sistema inercial já que a malha de controle tem como referência o ângulo de atitude  $\theta_r$ , e evita desta maneira esta transformação de coordenadas.

Além disso, o controle derivativo é um componente muito sensível ao ruído de sinais. Assim, ao invés de se derivar o sinal de saída, utiliza-se uma medida da derivada, que com base nas simplificações adotadas anteriormente, é a própria velocidade angular  $q$ .

O modelo do lançador utilizado para o desenvolvimento do controlador neste trabalho será de corpo rígido, pois apesar da relativa importância dos primeiros modos de flexão (modos menos atenuados), o principal comportamento dinâmico do foguete se deve ao modo de corpo rígido. Além disso, *notch filters* podem ser utilizados no lançador para filtrar o sinal na malha de controle, de maneira que o comportamento do controlador praticamente não seja afetado por estes modos de flexão (para evitar também que o controlador excite este modos).

A dinâmica dos atuadores e sensores foi desprezada para o projeto dos ganhos do controlador, por se considerar que são dinâmicas rápidas se comparadas com a dinâmica de corpo rígido do lançador, ficando a cargo das margens de ganho e fase suprir estas simplificações já que são “erros” de modelagem.

Os cálculos dos ganhos da malha de controle são realizados utilizando-se o modelo +simplificado, porém para validação destes ganhos, será utilizado o modelo simplificado e um modelo completo que será descrito posteriormente.

## 4.2 Métodos de Cálculos dos Ganhos da Malha de Controle

### 4.2.1 Método LQ (*Linear Quadratic*)

Este método emprega a técnica linear quadrática (LQ, *linear quadratic*) para gerar um modelo de referência que é utilizado para o cálculo dos ganhos da malha de controle do lançador.

A função de transferência do modelo +simplificado com a malha de controle (FIGURA 4.1) é dada por

$$\frac{\theta}{\theta_r} = \frac{-K_p M_{\beta_z} (s + K_i / K_p)}{s^3 - K_d M_{\beta_z} s^2 + (-K_p M_{\beta_z} - M_\alpha) s - M_{\beta_z} K_i} \quad (4.1)$$

No domínio do tempo a equação acima se torna

$$\ddot{\theta} + (-K_d M_{\beta_z}) \dot{\theta} + (-K_p M_{\beta_z} - M_\alpha) \dot{\theta} + K_p M_{\beta_z} \dot{\theta}_r + K_i M_{\beta_z} (\theta_r - \theta) = 0 \quad (4.2)$$

Integrando

$$\begin{aligned} \dot{\theta} + (-K_d M_{\beta_z}) \dot{\theta} + (-K_p M_{\beta_z} - M_\alpha) \theta + K_p M_{\beta_z} \theta_r + \\ + K_i M_{\beta_z} \int (\theta_r - \theta) dt + c = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde,

$c$  é a constante de integração, que para condições iniciais nulas é igual a zero.

Definindo,

$$x_c = \int (\theta_r - \theta) dt$$

e re-agrupando a Equação (4.3) de forma matricial, resulta na matriz de estados:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_d M_{\beta_z} & K_p M_{\beta_z} + M_\alpha & -K_i M_{\beta_z} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_p M_{\beta_z} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \theta_r \quad (4.4)$$

ou, de maneira simplificada

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A} \vec{x} + \mathbf{B} u \quad (4.5)$$

Voltando à Equação (4.1), esta é uma equação do tipo:

$$\frac{\theta}{\theta_r} = \frac{K(s + \eta p_0)}{(s + p_0)(s^2 + 2\xi \omega s + \omega^2)} \quad (4.6)$$

que por comparação da Equação (4.6) com (4.1), resulta em:

$$\begin{cases} K_p = \frac{\omega^2 + 2\xi \omega p_0 + M_\alpha}{-M_{\beta_z}} \\ K_i = \frac{\omega^2 p_0}{-M_{\beta_z}} \\ K_d = \frac{2\xi \omega + p_0}{-M_{\beta_z}} \\ \eta = \frac{\omega^2}{M_\alpha + 2\xi \omega + \omega^2} \end{cases} \quad (4.7)$$

Assim, nota-se que existe uma relação direta entre  $(\xi, \omega, p_0)$  e  $(K_p, K_i, K_d)$ . Observando as Equações (4.7), nota-se que são 4 e têm-se 3 variáveis de controle  $(K_p, K_i, K_d)$ . Desta forma, uma das variáveis da Equação (4.7) é livre. Esta variável escolhida foi  $\eta$  que pode ser calculada utilizando a Equação (4.7d), conhecendo-se os valores de  $\xi, \omega, p_0$ .

Através da estratégia LQ, deve-se minimizar o funcional J, dado por

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T (x' \cdot Q \cdot x + u' \cdot R \cdot u) dt \quad (4.8)$$

onde,

$Q$  e  $R$  são matrizes de ponderação, empiricamente escolhidas.

O funcional acima é integrado para  $T \rightarrow \infty$ , pois na verdade está-se utilizando a técnica de pólos congelados para um dado intervalo de tempo (modelo congelado no intervalo). Assim analisa-se o modelo como sendo linear e invariante em um tempo virtual  $T$  que pode ser considerado até o infinito (na verdade, até se atingir o estado estacionário). Além disso, a solução da Equação (4.8) só existe para  $T \rightarrow \infty$ .

Este método assume uma robustez necessária às incertezas e não-linearidades do veículo real, tanto em alta como em baixa frequência, além dos erros em  $M_\alpha$ , independentemente da escolha dos valores da matriz de ponderação  $Q$  e do custo  $R$  (Moreira e Kienitz, 1993).

O método LQ se baseia em encontrar um modelo de referência do sistema +simplificado em malha fechada (Equação (4.1)) para um instante de maior influência aerodinâmica (um certo intervalo de tempo). Variando-se empiricamente  $Q$  e  $R$ , determina-se  $\rho_0$ ,  $\xi$  e  $\omega$  (e como consequência  $\eta$ ) do modelo de referência para que o sistema de corpo rígido controlado seja ótimo pelo custo quadrático (minimização do funcional  $J$ ), respeitando-se os seguintes requisitos:

- a) Tempo de subida ( $t_{sub}$ ) e máximo sobresinal ou *overshoot* ( $M_p$ ) escolhidos;
- b) Erro à rampa  $\cong 0$ ;
- c) Saturação do atuador em posição (batente da capacidade de controle, sistema fica instável);
- d) Resposta pouco sensível ao vento.

Com base nestes dados do modelo de referência do instante notável escolhido, determina-se os valores de  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$  para cada instante de vô para que estas características do modelo de referência ( $p_0$ ,  $\xi$  e  $\omega$ ) sejam respeitadas instante a instante (ou seja, em todos instantes os pólos devem se assemelhar aos pólos/zeros do modelo de referência).

O grande problema do método LQ é exatamente o fato de ter sido aplicado somente em um dado instante de vô e estendido para todos os outros, ou seja, as matrizes de ponderação Q e R foram determinadas somente no instante escolhido (fixou-se determinada condição), mas ao serem utilizadas em outros instantes não se obtêm resultados adequados. Como comentado acima, em cada instante de tempo  $\eta$  não pode ser fixado com o mesmo valor do modelo de referência e, como conseqüência, o transitório é degradado em relação à resposta no tempo desejada (sobresinal, tempo de subida e de assentamento).

Além disso, a escolha das matrizes é empírica, variando conforme o desejo e competência do operador e sua influência nos resultados não é muito clara (os termos cruzados não têm sentido físico).

Para mais detalhes sobre o método LQ, veja Moreira e Kienitz (1993).

#### 4.2.2 Método Analítico

Este novo método para obtenção dos ganhos do controlador é proposto neste trabalho para que possibilite uma visão mais física do ajuste dos ganhos, além de respostas no tempo melhores que o método LQ de referência. O método analítico busca encontrar uma relação entre os ganhos do controlador e os parâmetros de resposta no tempo, mas sem buscar fixar os pólos e zeros e, sim, os requisitos de resposta no tempo.

Voltando à Equação (4.1) (obtida da FIGURA 4.1):

$$\frac{\theta}{\theta_r} = \frac{-K_p M_{\beta_z} (s + K_i / K_p)}{s^3 - K_d M_{\beta_z} s^2 + (-K_p M_{\beta_z} - M_\alpha) s - M_{\beta_z} K_i}$$



Esta equação pode ter 3 formas:

- a) 1 zero, 1 pólo real, 2 pólos complexos conjugados (fase atmosférica ou **A1**);
- b) 1 zero, 3 pólos reais (fase atmosférica ou **A2**);
- c) 2 pólos (reais ou complexos), durante a fase fora da atmosfera (fase não-atmosférica ou **NA**), quando  $M_\alpha$  desaparece e  $K_i$  também é zerado (explicado mais à frente), simplificando a equação.

De maneira gráfica pode-se ver na FIGURA 4.4 estas 3 formas que a Equação (4.1) pode assumir. A seguir, apresenta-se o método de cálculo dos ganhos nestas 3 situações.

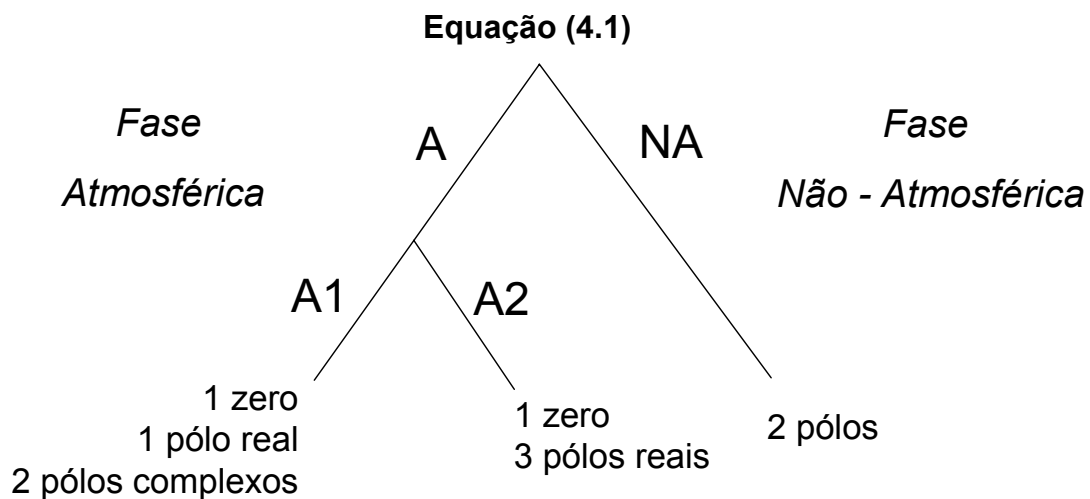


FIGURA 4.4: Três formas da Equação (4.1).

a) Fase atmosférica A1

A Equação (4.1), é uma equação do tipo:

$$\frac{\theta}{\theta_r} = \frac{K(s + z_0)}{(s + p_0)(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)} \quad (4.9)$$

na qual

$$\begin{cases} K = -K_p M_{\beta_z} \\ z_0 = \frac{K_i}{K_p} \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\begin{cases} K_p = \frac{\omega^2 + 2\xi\omega p_0 + M_\alpha}{-M_{\beta_z}} \\ K_d = \frac{2\xi\omega + p_0}{-M_{\beta_z}} \\ K_i = \frac{\omega^2 p_0}{-M_{\beta_z}} \end{cases} \quad (4.11)$$

Para se determinar o erro estacionário à rampa unitária de malha fechada do modelo simplificado, utiliza-se o teorema do valor final (Kuo, 1985 ; Ogata, 1997; Dorf e Bishop, 1998 ):

$$\epsilon_r = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) \quad (4.12)$$

onde,

$\epsilon_r$  é o erro estacionário à entrada rampa;

$e(t)$  é o erro no tempo à entrada rampa;

$E(s)$  é o erro no domínio de s (entrada rampa).

O erro no domínio s é dado por

$$\begin{aligned} E(s) &= \theta_r(s) - \theta(s) = \\ &= \theta_r(s) - \frac{\theta(s)}{\theta_r(s)} \theta_r(s) = \\ &= \theta_r(s) \left( 1 - \frac{\theta(s)}{\theta_r(s)} \right) \end{aligned}$$

Como se deseja o erro à rampa unitária  $\theta_r(s) = 1/s^2$  e  $\theta(s)/\theta_r(s)$  é a própria Equação (4.1), substituindo estes termos na equação acima,  $E(s)$  é determinado. Aplicando  $E(s)$  na Equação (4.12) e fazendo o limite, obtém-se por fim o erro estacionário à entrada rampa unitária:

$$\epsilon_r = \frac{M_\alpha}{M_{\beta_z} \cdot K_i} \quad (4.13)$$

e como especificado, este valor é constante para um certo intervalo de tempo. Caso não fosse usado um integrador, este erro seria infinito (basta fazer  $K_i \rightarrow 0$ ).

Para determinação dos valores de  $K_i$  ao longo do tempo, primeiramente determina-se o valor máximo do erro à rampa. Este máximo ocorre quando a relação  $M_\alpha / M_{\beta_z}$  é máxima (ocorre para máximo  $M_\alpha$ ) e neste instante o valor de  $K_i$  é arbitrado.

Uma vez determinado o erro máximo à entrada rampa, os valores de  $K_i$  ao longo do vôo são calculados com base na Equação (4.14), dependendo somente do valor de  $M_{\beta_z}$ .

$$K_i = \frac{M_{\alpha_{\max}}}{\epsilon_{r \max} M_{\beta_z}} \quad (4.14)$$

Substituindo-se a Equação (4.11c), na Equação (4.14), determina-se  $\omega$  :

$$\omega^2 = \frac{-M_{\alpha_{\max}}}{p_0 \epsilon_{r \max}} \quad (4.15)$$

No entanto, os resultados utilizando as equações (4.14) e (4.15) não foram satisfatórios pois  $K_i$  diminuía muito rapidamente para zero ao longo do vôo (acreditava-se que  $K_i$  era importante para o ciclo limite da tubeira). Então, uma nova forma de cálculo foi adotada na qual a queda de  $K_i$  não fosse tão rápida. O máximo erro à rampa é

$$\epsilon_{r \max} = \frac{M_{\alpha_{\max}}}{M_{\beta_z} \Big|_{M_{\alpha_{\max}}} \cdot K_i \Big|_{M_{\alpha_{\max}}}} \quad (4.16)$$

onde,

$$M_{\beta_z} \Big|_{M_{\alpha_{\max}}} \text{ é } M_{\beta_z} \text{ no instante de máximo } M_{\alpha};$$

$K_i|_{M_{\alpha \max}}$  é  $K_i$  no instante de máximo  $M_{\alpha}$ .

Substituindo a Equação (4.16) na Equação (4.14), resulta em:

$$K_i = K_i|_{M_{\alpha \max}} \cdot \frac{-M_{\beta_z}|_{M_{\alpha \max}}}{-M_{\beta_z}} \quad (4.17)$$

isto é, no máximo valor de  $M_{\alpha}$ ,  $K_i = K_i|_{M_{\alpha \max}}$  (como era de se esperar, já que esta foi a condição adotada). Propondo uma nova variação de  $K_i$  (com objetivo de se obter uma diminuição de  $K_i$  mais lenta ao longo do vôo, melhorando o ciclo limite) :

$$K_i = K_i|_{M_{\alpha \max}} \cdot \frac{\sqrt{-M_{\beta_z}|_{M_{\alpha \max}}}}{\sqrt{-M_{\beta_z}}} \quad (4.18)$$

$M_{\beta_z}$  tem valores negativos para um lançador instável naturalmente, por isso o sinal negativo foi deixado na Equação (4.18). Por simplificação, cria-se uma nova constante  $\delta$  :

$$\delta = K_i|_{M_{\alpha \max}} \cdot \sqrt{-M_{\beta_z}|_{M_{\alpha \max}}} \quad (4.19)$$

e, por fim, as equações de  $K_i$  e  $\omega$  se tornam:

$$K_i = \frac{\delta}{\sqrt{-M_{\beta_z}}} \quad (4.20)$$

$$\omega^2 = \frac{\delta \sqrt{-M_{\beta_z}}}{p_0} \quad (4.21)$$

A Equação (4.18) faz com que a queda de  $K_i$  não seja tão rápida quanto a Equação (4.17) para grandes valores de  $M_{\beta_z}$ . Assim como  $K_i|_{M_{\alpha \max}}$ , o valor de  $p_0$  também deve ser arbitrado.

Por fim, têm-se 2 equações (Equações (4.11a) e (4.11b) e 3 incógnitas ( $K_p$ ,  $K_d$  e  $\xi$ ). A equação que falta é obtida de Rohr et al. (1992), que mostra que para uma função de transferência no formato:

$$G_s = \frac{\omega^2 p_0}{z_0} \frac{(s + z_0)}{(s + p_0)(s^2 + 2\xi \omega s + \omega^2)}$$

a resposta no tempo à entrada degrau unitário resulta na equação:

$$y(t') = 1 + \frac{p_0' - z_0'}{z_0'[(\xi - p_0')^2 + \beta^2]} e^{-p_0' t'} + \frac{p_0'}{z_0' \beta} \left[ \frac{(z_0' - \xi)^2 + \beta^2}{(p_0' - \xi)^2 + \beta^2} \right] e^{-\xi t'} \text{sen}(\beta t' + \psi) \quad (4.22)$$

onde,

$$\psi = \text{tg}^{-1} \frac{\beta}{z_0' - \xi} - \text{tg}^{-1} \frac{\beta}{p_0' - \xi} - \text{tg}^{-1} \frac{\beta}{-\xi}$$

$$\beta = \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$t' = \omega t \quad ; \quad p_0' = \frac{p_0}{\omega} \quad ; \quad z_0' = \frac{z_0}{\omega}$$

A condição temporal utilizada na Equação (4.22) é a própria definição do tempo de subida (100%), ou seja,  $y(t_{\text{sub}}) = 1$  (resposta ao degrau unitário). Desta maneira, todos os termos da equação acima podem ser calculados, restando apenas o valor de  $\xi$ . Variando-se os valores de  $\xi$  em passos pequenos à partir de zero, determina-se o valor de  $\xi$  que torne esta equação verdadeira.

Com o valor de  $\xi$  calculado e as Equações (4.11a) e (4.11b), é possível se determinar os valores de  $K_p$ ,  $K_d$ .

b) Fase atmosférica A2

Caso não hajam 2 pólos complexos conjugados, somente pólos reais (caso em que  $\xi > 1$ ), então a Equação (4.22) assume o formato

$$y(t) = A + B \cdot e^{-p_0 t} + C \cdot e^{-p_1 t} + D \cdot e^{-p_2 t} \quad (4.23)$$

onde,

$A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são as constantes determinadas pelo método das frações parciais (Ogata, 1997);

$p_1$ ,  $p_2$  são pólos reais, dados por ;

$$p_1 = \xi \omega + \omega \sqrt{\xi^2 - 1};$$

$$p_2 = \xi \omega - \omega \sqrt{\xi^2 - 1}.$$

Assim, como na fase **A1**, a condição temporal para a Equação (4.23) é também  $y(t_{\text{sub}}) = 1$ , calculando-se  $\xi$  da mesma maneira e, conseqüentemente,  $K_p$ ,  $K_d$ .

c) Fase não-atmosférica NA

Para a fase **não-atmosférica**, o termo  $M_\alpha$  se torna zero pois não existe mais pressão dinâmica ou esta é desprezível. Desta maneira, a Equação (3.61) do modelo +simplificado se torna

$$\frac{\theta(s)}{\beta_z(s)} = \frac{-M_{\beta_z}}{s^2} \quad (4.24)$$

ou seja, o sistema se torna uma inércia pura. Como existe um duplo integrador, não há necessidade de um integrador no controlador, então  $K_i$  é feito igual a zero, fazendo com que a Equação (4.1) se modifique para

$$\frac{\theta}{\theta_r} = \frac{-K_p M_{\beta_z}}{s^2 - K_d M_{\beta_z} s - K_p M_{\beta_z}} \quad (4.25)$$

Assim, como consequência, a Equação (4.9) simplifica em um sistema de 2ª ordem, fazendo com que os cálculos dos ganhos sejam facilitados, já que para um sistema assim, a relação do sobressinal, tempo de subida e assentamento com  $\omega$  e  $\xi$  é diretamente equacionada (Kuo, 1985 ; Ogata, 1997; Dorf e Bishop, 1998).

Portanto, para as 3 condições **A1**, **A2** ou **NA**, os 3 ganhos do controlador podem ser determinados com base no tempo de subida e de assentamento, além da especificação de  $K_i$  utilizada para o erro máximo à rampa e do valor de  $p_0$ . Naturalmente, estes ganhos devem ser testados no modelo simplificado de corpo rígido e se analisar sua resposta no tempo, já que foram obtidos adotando-se o modelo +simplificado.





## **CAPÍTULO 5**

### **RESULTADOS**

Neste capítulo, a dinâmica de um lançador de satélites é aplicada ao caso particular do VLS. São apresentados os dados aerodinâmicos, a malha de controle adotada, os métodos para obtenção dos ganhos desta malha e, por fim, a comparação entre os dois métodos.

#### **5.1 Dados do Veículo Lançador de Satélites (VLS)**

O VLS é a sigla para Veículo Lançador de Satélites, desenvolvido pelo Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE) pertencente ao Ministério da Aeronáutica, um órgão do governo brasileiro.

Este lançador brasileiro tem como objetivo primário carregar uma certa carga útil (um satélite) até determinada altitude e velocidade da Terra, ou seja, inserir a carga paga em uma certa órbita terrestre escolhida. Para isso, foi adotado como meio de transporte um foguete de 4 estágios, todos propulsionados à combustão sólida, dos quais 3 são controlados (mais detalhes em Isakowitz et al. (1999)).

Com base na variação dos parâmetros de massa/inércia e aerodinâmicos do VLS, o intervalo onde estes parâmetros podem ser considerados constantes é de 1 segundo. Desta maneira, dentro deste intervalo o lançador é considerado como um sistema invariante e, portanto, pode-se calcular a função de transferência de atitude de corpo rígido, conforme equacionamento apresentado no Capítulo 3. Calculando-se a TF a cada 1 segundo, obtém-se por fim, os pólos e zeros do modelo adotado ao longo de todo voo considerado, permitindo o projeto do controlador com este modelo linear em cada instante.

Um computador de bordo digital cumpre a função do controlador, fazendo a aquisição dos dados dos sensores e enviando os comandos para os atuadores (tubeira móvel). Tanto a aquisição dos dados, como o próprio controlador, possuem taxa de amostragem de 64 Hz, a qual é rápida se comparada com a dinâmica do lançador, fazendo com que o controlador possa ser considerado

contínuo. Por fim, verificou-se que a dinâmica (linearizada) dos sensores influencia muito pouco na dinâmica do lançador, portanto não foram consideradas.

O modelo do VLS utilizado para o desenvolvimento do controlador neste trabalho será de corpo rígido, pois apesar da importância da estabilidade do 1º e 2º modos de flexão (modos menos atenuados), o principal comportamento dinâmico do foguete se deve ao modo de corpo rígido, isto é, o que se está visando é o comportamento do corpo rígido.

Para atenuação do 1º modo de flexão do VLS, foi adotado um *notch filter* na realimentação (aquisição), ou seja, um filtro sintonizado neste modo para um determinado instante de vôo (instante crítico para flexão). Este filtro atenua suficientemente o sinal gerado por este modo de flexão, de maneira que se possa considerar o foguete rígido para desenvolvimento do controlador, não se esquecendo, porém, que as margens de ganho e fase são bastante influenciadas pelos modos menos atenuados (primeiros modos), pelo atuador e pelos filtros do sistema.

### **5.1.1 Dados Aerodinâmicos e de Flexão**

No apêndice A são apresentados os dados aerodinâmicos (obtidos através de ensaios em túnel de vento) e de flexão (obtidos através de ensaios em laboratório) para análise dos resultados, sendo que estes dados são considerados até aproximadamente o final da cauda de empuxo (final da queima do estágio) do primeiro estágio e início da ignição do segundo estágio, ou seja, até o instante 70 segundos de vôo. Na FIGURA 5.1 são mostrados os dados aerodinâmicos e mais alguns parâmetros ao longo do vôo.

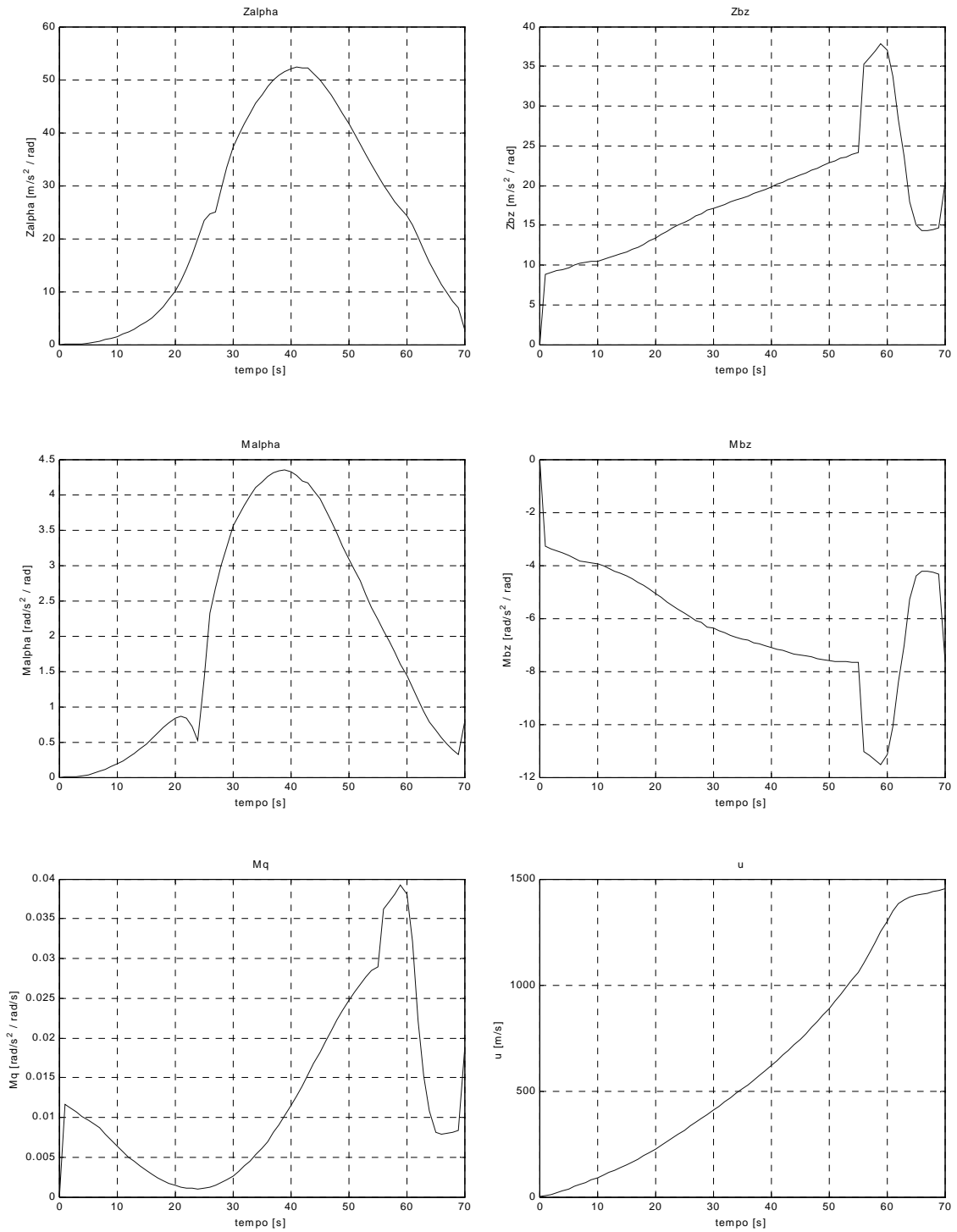


FIGURA 5.1: Coeficientes de aceleração e outros parâmetros ao longo do vôo do VLS (continua).

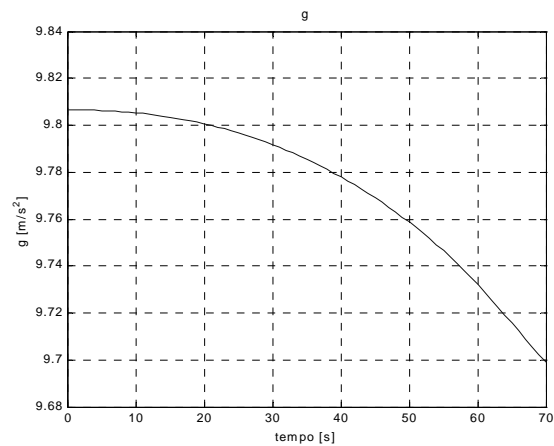


FIGURA 5.1: Conclusão.

Os pólos e zeros (3 pólos e 1 zero) do modelo simplificado do VLS (corpo rígido) para diversos instantes de vôo podem ser observados na FIGURA 5.2. Nota-se que realmente ocorre uma grande variação dos pólos e zeros do sistema simplificado, demonstrando a necessidade de ganhos escalonados ao longo do vôo para não degradar a resposta no tempo desejada, ou de maneira geral, o controlador precisa se “adaptar” às mudanças de comportamento do lançador (mesmo que esta “adaptação” seja *off-line*, através do escalonamento dos ganhos no tempo).

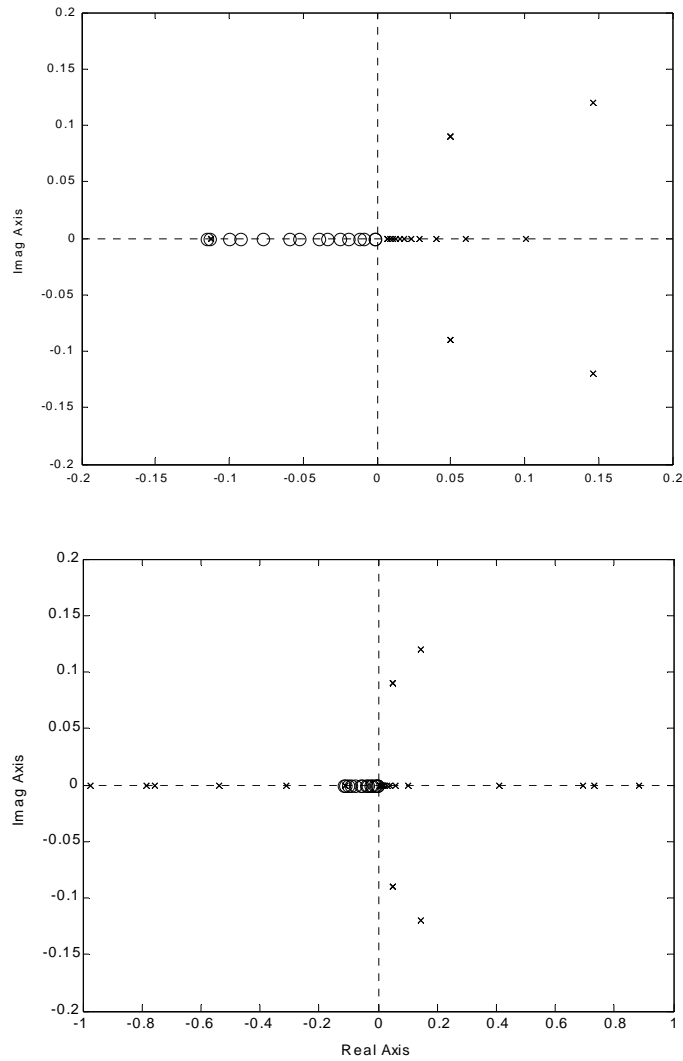


FIGURA 5.2: Pólos e zeros do modelo simplificado de corpo rígido (malha aberta), de 0 a 70 seg. de 5 em 5 seg (zoom, diversas escalas) (continua).

Existe pelo menos um pólo no SPD (semi-plano direito) e, portanto, o sistema é naturalmente instável. Isto ocorre pois no modelo de corpo rígido do VLS, o CG está localizado atrás do CP (centro de pressão), sendo que a distância entre os dois (margem estática) varia ao longo do vôo (isto é comprovado pela variação dos pólos no SPD ao longo do tempo).

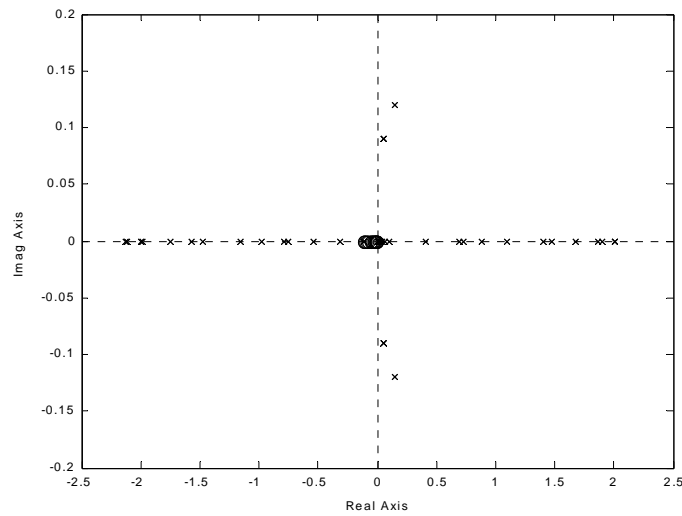


FIGURA 5.2: Conclusão.

Na FIGURA 5.3 pode-se observar o lugar das raízes para o sistema controlado (semelhante à FIGURA 4.1, mas utilizando a planta do modelo simplificado).

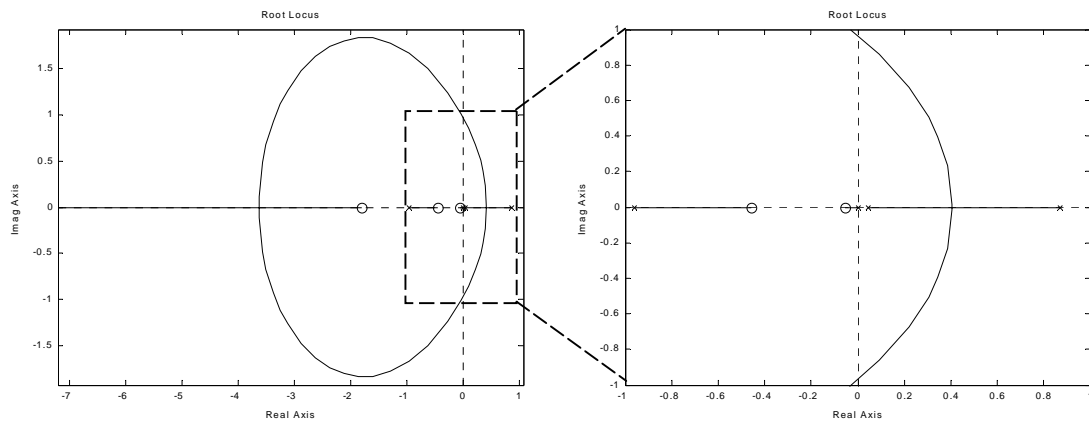


FIGURA 5.3: Lugar das raízes para o modelo simplificado controlado, semelhante à FIGURA 4.1 (instante 20 seg. de vôo com  $K_i = 0,82$  e  $K_d = 1,0$ ).

Para que o sistema seja estável, o ganho proporcional deve fazer os pólos no SPD “caminharem” até o SPE (semi-plano esquerdo). Além disso, o pólo localizado na origem (devido o integrador) vai para a esquerda em direção ao zero à medida que o ganho é aumentado, mas ainda sim fica muito próximo ao

eixo imaginário. Este pólo dominante possui uma baixa atenuação (distância medida no eixo real do pólo em questão até o eixo imaginário), porém o seu efeito é parcialmente compensado pela presença do 1º zero ao lado esquerdo da origem. Esta baixa atenuação afetará o tempo de assentamento do sistema, já que este está relacionado à menor atenuação do sistema.

Na FIGURA 5.4 é apresentado o lugar das raízes do modelo +simplificado, controlado como na FIGURA 4.1. Observa-se que o pólo na origem permanece pois é do integrador, mas o pólo que estava no SPD muito próximo à origem foi cancelado com o 1º zero à esquerda da origem. Esta aproximação parece bem razoável, já que existiam no modelo simplificado 2 pólos e um zero, todos muito próximos à origem. Esta simplificação de pólos e zeros é consequência das hipóteses 7. e 8. apresentadas no Capítulo 3 para se passar do modelo simplificado e se obter o modelo +simplificado de corpo rígido.

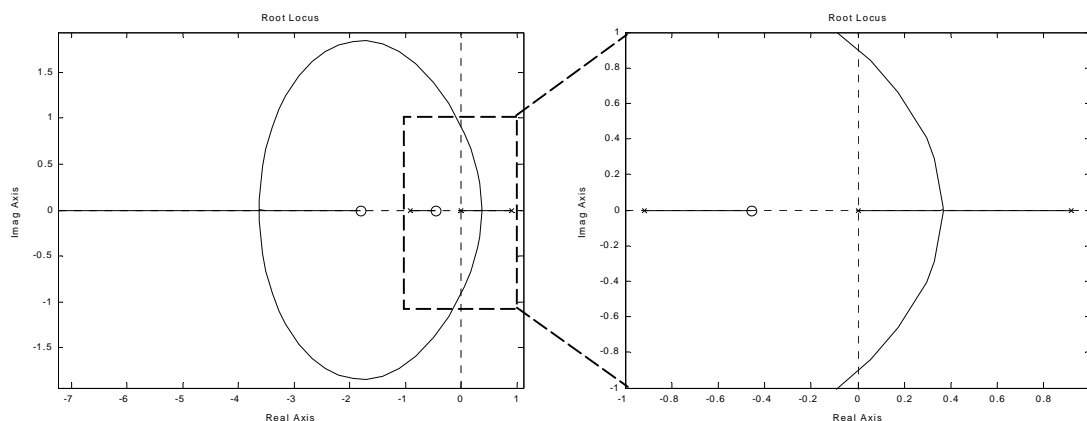


FIGURA 5.4: Lugar das raízes para o modelo +simplificado controlado, como na FIGURA 4.1 (instante 20 seg. de voo com  $K_i = 0,82$  e  $K_d = 1,0$ ).

### 5.1.2 Modelo Completo

Para validação dos dois métodos apresentados neste trabalho, será utilizado um modelo denominado “completo” do VLS que inclui outros elementos que foram desprezados para cálculo dos ganhos, porém influenciam sensivelmente na robustez (margens de fase e ganhos) do sistema. Este é um modelo linear, portanto efeitos da discretização ou sampleamento não está sendo considerada.

Neste modelo completo, foram considerados, além da função de transferência do corpo rígido, os dois primeiros modos de flexão por serem menos atenuados. O modelo linear da tubeira móvel também foi levado em consideração.

No canal de realimentação existem 3 elementos além do ganho derivativo: o Filtro *Notch*, o BLG (Bloco Girométrico) e o filtro BLG.

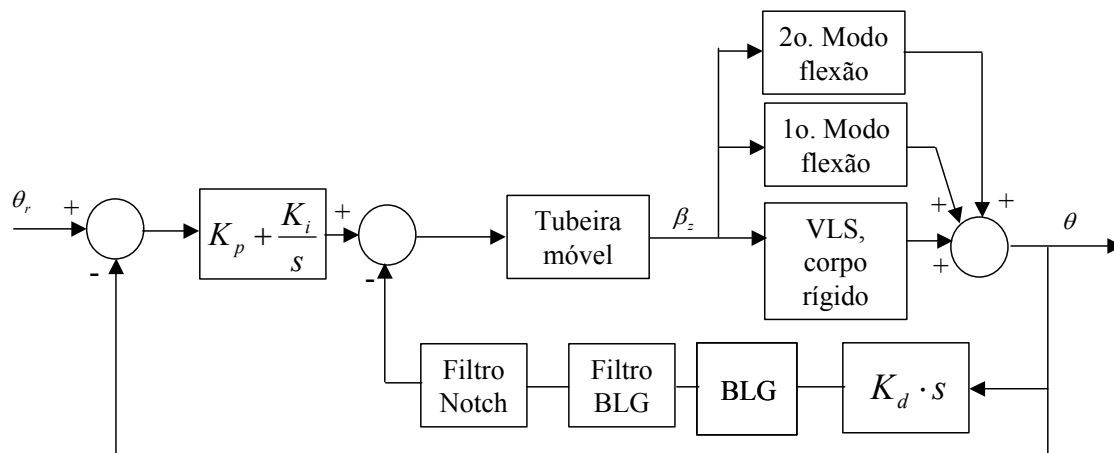


FIGURA 5.5: Modelo Completo.

O BLG (Bloco Girométrico) é o elemento responsável pela medida da velocidade angular  $q$ , entre outras medidas. No entanto, a dinâmica deste componente foi desconsiderada. A realimentação de velocidade real utiliza a velocidade angular  $q$ , porém por simplificação  $q \cong \dot{\theta}$  (conforme as hipóteses adotadas no Capítulo 3) por isso o termo “s” é incluído multiplicando o termo derivativo  $K_d$  (não sendo na realidade uma derivada da saída  $\theta$ ).



O filtro *Notch* foi projetado para atenuar o 1º modo de flexão, de modo que este pudesse ser desconsiderado (já que este modo tem frequência mais baixa, mais próxima dos comandos de manobra) e o filtro BLG é responsável pela filtragem da saída do bloco BLG, eliminando ruídos de alta frequência.

As funções de transferência de cada elemento são apresentadas a seguir:

a) VLS, corpo rígido:

A função de transferência do corpo rígido é o modelo simplificado, dado pela Equação (3.60).

b) 1º e 2º modos de flexão

Os dois modos de flexão são representados de maneira simplificada através da função de transferência (veja Greensite, 1970 ).

$$TF_{\text{flex } i} = \frac{K_{f_i}}{s^2 + 2\xi_{f_i}\omega_{f_i} \cdot s + \omega_{f_i}^2} \quad (5.1)$$

onde,

$i = 1$  ou  $2$ , indicando o 1º ou 2º modo de flexão;

$K_{f_i}$  é o ganho do modo  $i$  e varia ao longo do tempo;

$\xi_{f_i} = 0.002$  ( $i=1,2$ ), coeficiente de amortecimento do modo de flexão  $i$ .

Constante ao longo do vôo ;

$\omega_{f_i}$  é a frequência natural do modo  $i$  e varia ao longo do tempo.

c) Tubeira móvel (modelo linear):

Na FIGURA 5.6, é apresentado o modelo linear da tubeira móvel, com sua realimentação interna (Bueno e Leite Filho, 2003).

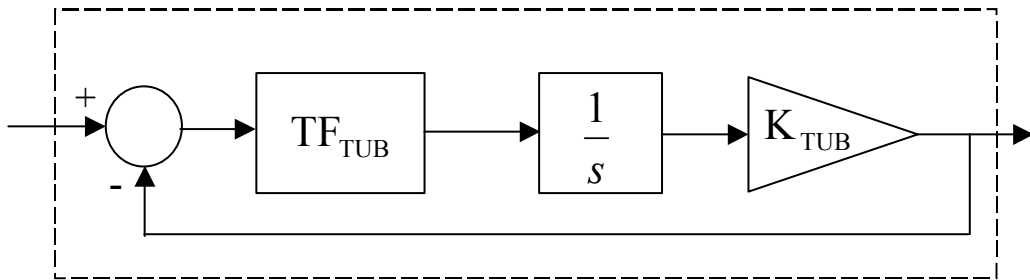


FIGURA 5.6: Tubeira móvel (modelo linear), mostrando realimentação interna.

O ganho da tubeira é  $K_{TUB} = 28$  e a função de transferência da  $TF_{TUB}$  é dada por

$$TF_{TUB} = \frac{234100}{s^2 + 300 \cdot s + 234100} \quad (5.2)$$

d) BLG (bloco girométrico):

Como comentado acima, a dinâmica do BLG não foi considerada e, como consequência, sua função de transferência adotada é  $TF_{BLG} = 1$ .

e) Filtro BLG:

A função de transferência do filtro BLG é dada por

$$\begin{aligned} TF_{\text{filtro BLG}} &= \frac{4611695}{s^3 + 213,36 \cdot s^2 + 49105 \cdot s + 4611695} = \\ &= \frac{1}{(2,168400e-7) \cdot s^3 + (4,626499e-5) \cdot s^2 + (1,064793e-2) \cdot s + 1} \end{aligned} \quad (5.3)$$

f) Filtro Notch:

$$TF_{\text{notch}} = K \frac{s^2 + 2\xi_n \omega_n \cdot s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi_d \omega_d \cdot s + \omega_d^2} \quad (5.4)$$

onde,

$K = 1,00$  , ganho do filtro *Notch*;

$\omega_n = 30,00$  rad/s , frequência natural do numerador;

$\xi_n = 0,02$ , coeficiente de amortecimento do numerador;

$\omega_d = 29,50$  rad/s, frequência natural do denominador;

$\xi_d = 1,00$  , coeficiente de amortecimento do denominador.

Para se calcular a margem de fase e ganho do modelo completo, foi utilizado o modelo em malha aberta (*open-loop*), apresentado na FIGURA 5.7. Este modelo é obtido através de álgebra de blocos à partir do modelo completo (FIGURA 5.5) e tem exatamente a mesma resposta em malha fechada.

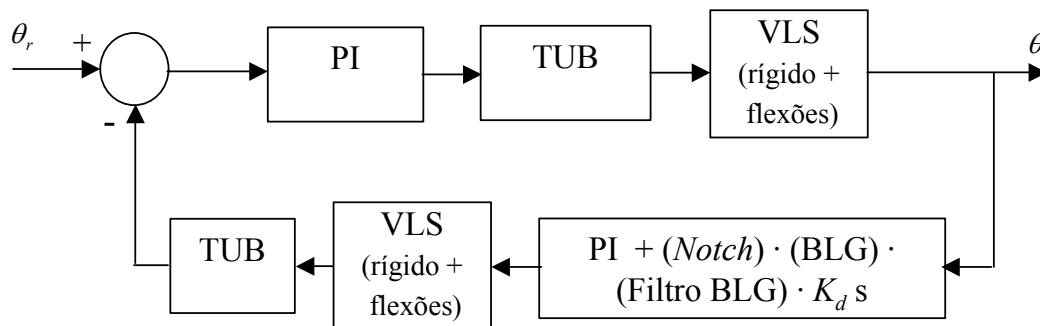


FIGURA 5.7: Modelo utilizado para cálculo das margens de fase e ganho, obtido à partir do modelo completo (FIGURA 5.5).

## 5.2 Resultados do VLS

Para cada 1 segundo de vôo, foram realizadas simulações com a entrada degrau unitário. Cada simulação tem duração de 30 segundos. Nestas simulações são analisados: o máximo sobresinal, o tempo de subida, o tempo de assentamento (critério 2%). Além disso, quando for o caso, são analisados: o máximo comando da tubeira móvel, uma variável que indica a estabilidade (“1” indica estável e “0” indica sistema instável) e as margens de fase e ganho do modelo completo.

Nestas simulações, caso o tempo de assentamento (critério 2%) ultrapasse os 30 seg. ou não seja atingido (devido à instabilidade), o valor é mantido como zero.

## 5.2.1 Método LQ

### 5.2.1.1 Dados do VLS para o Método LQ

No desenvolvimento original dos ganhos da malha de controle do VLS, foi utilizada a técnica linear quadrática (LQ, *linear quadratic*), com os seguintes requisitos:

- a)  $t_{\text{sub}} \cong 1 \text{ seg.}$ ,  $M_p \cong 10\%$ ;
- b) Erro a rampa  $\cong 0$ ;
- c) Atuador não pode saturar em posição (capacidade de controle, sistema fica instável);
- d) Resposta pouco sensível ao vento.

O instante de máxima pressão aerodinâmica foi adotado por ser o instante de máxima força aerodinâmica para um mesmo ângulo de ataque (este instante de máxima pressão dinâmica ocorre em 25 segundos de vôo). As matrizes de ponderação adotadas são as seguintes:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}; \quad R = 0,4$$

e como consequência

$p_0 = 0,44785$ ;  $\xi = 0,89486$  ;  $\omega = 3,02630 \text{ rad/s}$ . E da Equação (4.7d),  $\eta = 0,5732$ .

### 5.2.1.2 Resposta do Método LQ (Modelo Simplificado)

Na FIGURA 5.8 são apresentados os ganhos calculados ao longo do primeiro estágio do VLS utilizando-se o método LQ (modelo +simplificado) e os parâmetros de resposta no tempo para o modelo simplificado com entrada ao degrau unitário.

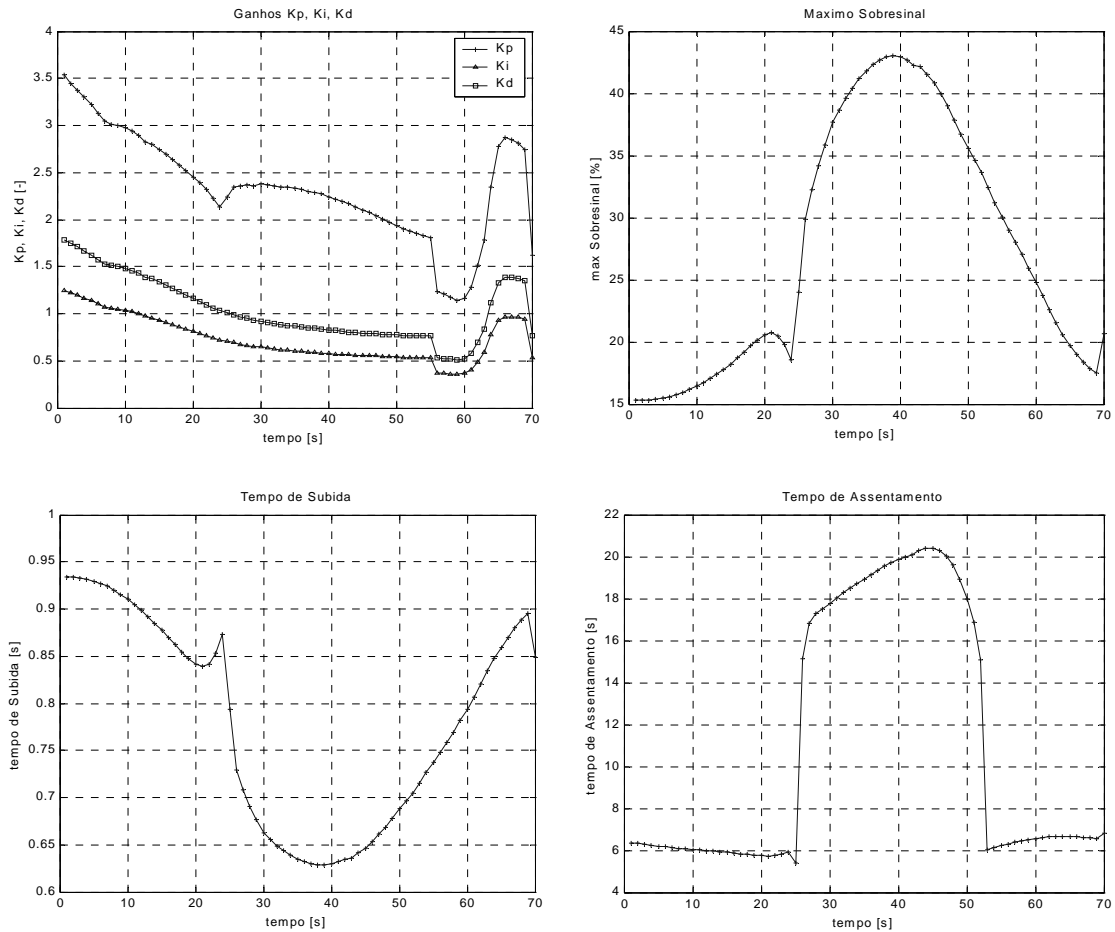


FIGURA 5.8: Ganhos do controlador (método LQ) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado).

Na FIGURA 5.9 é apresentada a resposta ao degrau do modelo simplificado de corpo rígido, aplicando-se a metodologia LQ. Como as matrizes de ponderação foram ajustadas para o instante 25 seg. de voo, sua resposta é mais coerente com relação aos requisitos adotados (Tabela 5.1). No entanto, mesmo para

este instante de vôo, o sobresinal ultrapassou 10% e o tempo de subida foi menor que 1 segundo (poderia excitar a flexão).

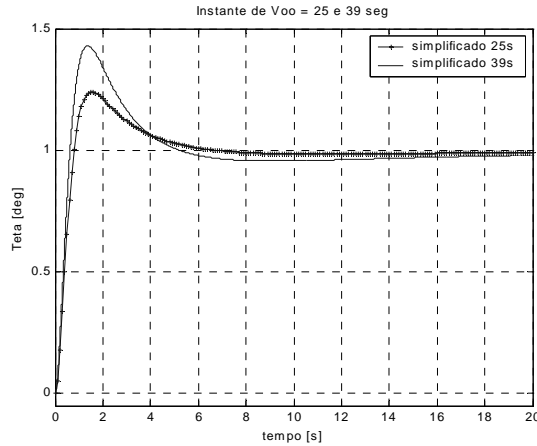


FIGURA 5.9: Resposta ao degrau unitário (método LQ, modelo simplificado).

Conforme esperado, a resposta para o instante de máximo  $M_{\alpha}$  (39 segundos de vôo) foi pior ainda, com um sobresinal de 43% (muito além dos 10% estabelecidos como requisito) e tempo de subida menor que o desejado, além de um assentamento lento demais.

TABELA 5.1: Comparação de instantes de vôo para método LQ.

	Instante de vôo	
	25 seg	39 seg
<b>Máximo sobresinal</b>	24 %	43 %
<b>Tempo de subida (100 %)</b>	0,79 seg	0,63 seg
<b>Tempo de assentamento (2%)</b>	5 seg	20 seg

A aplicação total de LQ não ficou adequada para os requisitos estabelecidos. O método poderia ser melhorado com um estudo das matrizes ao longo do vôo (matrizes variando durante o vôo), porém é um estudo trabalhoso e muito

empírico devido a escolha das matrizes Q e R. Além disso, Alazard et al. (2003) indica que tal procedimento não permite interpolação (sistema mal condicionado).

### 5.2.1.3 Resposta do Método LQ (Modelo Completo)

Utilizando os mesmos ganhos obtidos com o modelo +simplificado, agora se faz a simulação no tempo para os diversos instantes de voo com o modelo completo. Os resultados podem ser vistos na FIGURA 5.10, FIGURA 5.11 e FIGURA 5.12, além do máximo sobresinal, do tempo de subida (100%) e tempo de assentamento (2%) também são apresentados 3 outros gráficos: margem de fase, margem de ganho e um indicação se o sistema é estável ou não (“1” indica estável e “0” indica sistema instável).

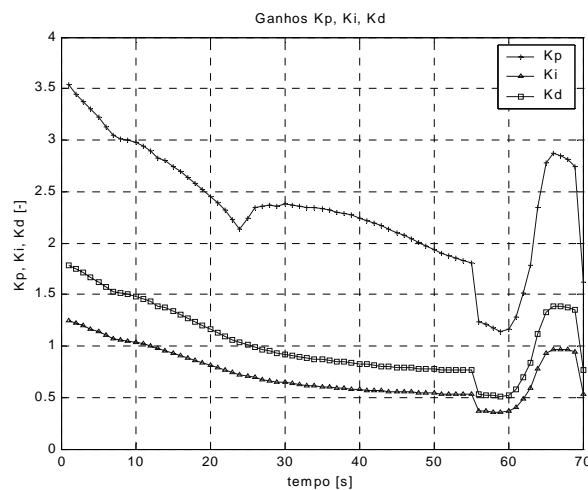


FIGURA 5.10: Ganhos do controlador (método LQ).

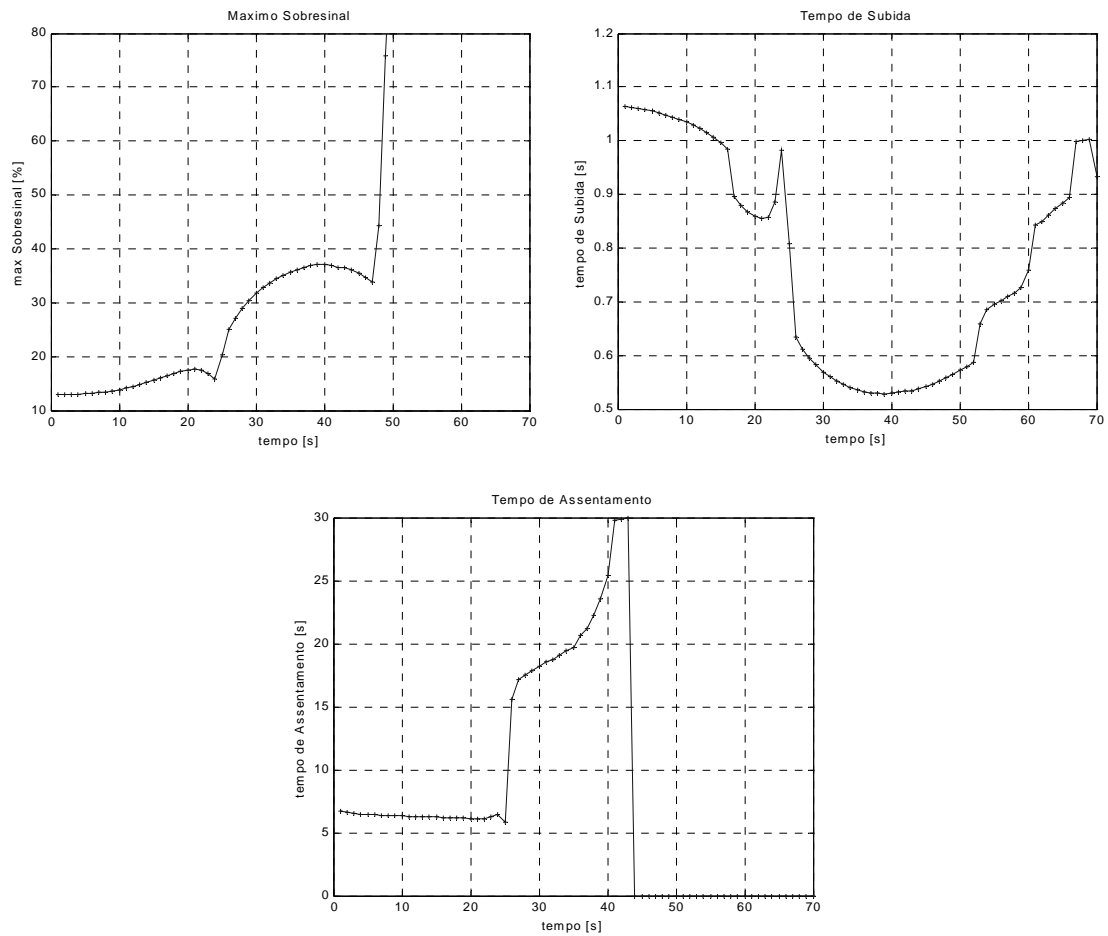


FIGURA 5.11: Parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo completo).

A partir de 42 seg. de vôo o veículo controlado se tornou instável, porém mesmo antes deste evento as margens de fase e ganho do sistema já estavam pequenas demais. Segundo a literatura, de maneira geral é recomendado uma margem de ganho de 6 dB e uma margem de fase de  $30^\circ$  (Ogata, 1997), porém a margem de ganho do sistema iniciou em 6 dB e só foi diminuindo e a margem de fase iniciou em  $6^\circ$ , muito abaixo do ideal.



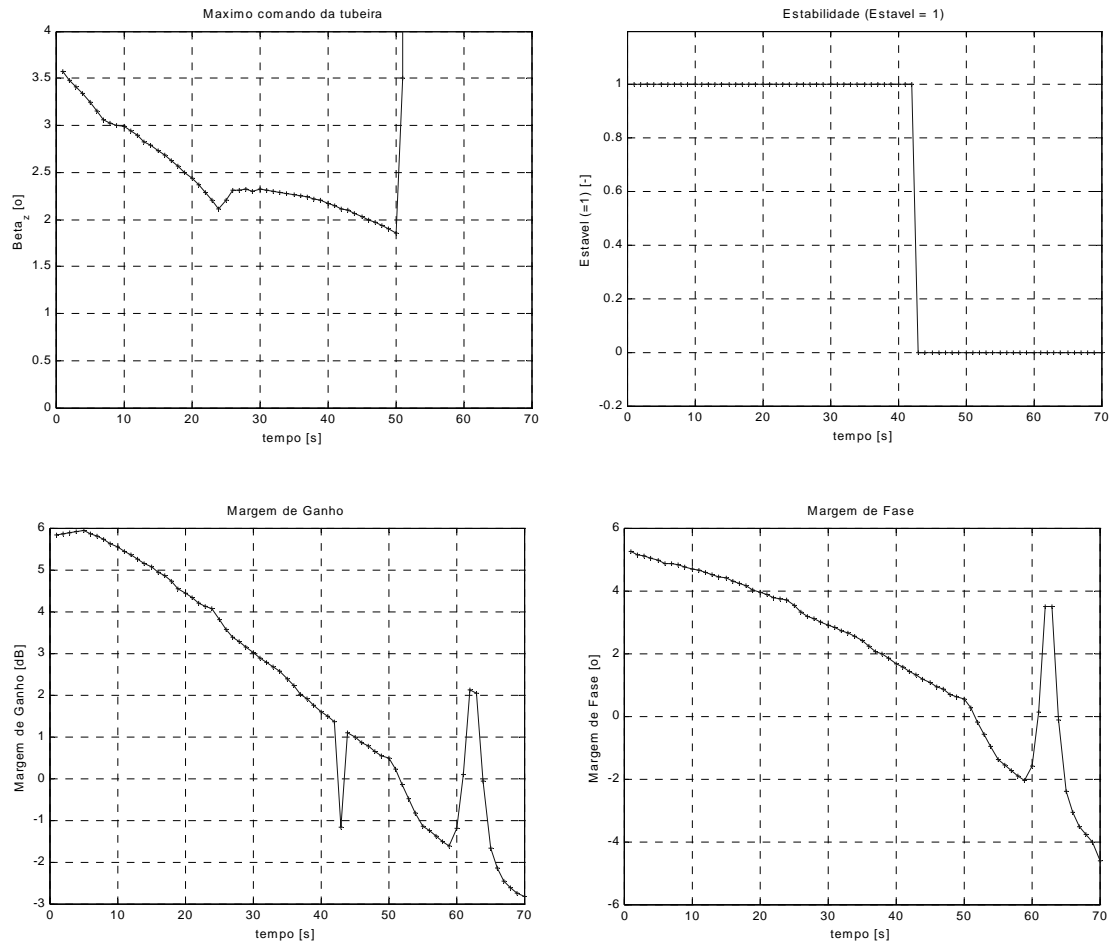


FIGURA 5.12: Outros parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo completo) e margem de fase e ganho.

A resposta no tempo para o instante 25 seg. de vôo para o modelo simplificado e completo pode ser visto na FIGURA 5.13. O modelo completo tem um comportamento muito semelhante a do modelo simplificado, com exceção do máximo sobresinal que foi maior para o modelo simplificado. O modelo completo devido a presença dos modos de flexão tem uma oscilação de alta frequência que depois vai diminuindo (atenuando).

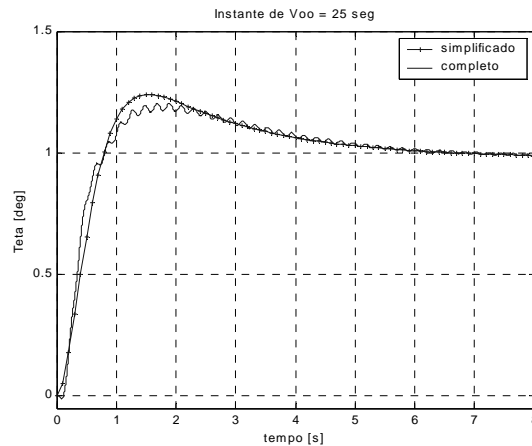


FIGURA 5.13: Resposta ao degrau unitário para o instante 25 seg. de vôo com modelo completo e simplificado, ganhos do método LQ.

No instante 43 seg. de vôo (início da instabilidade), FIGURA 5.14, a oscilação devido a flexão não é mais atenuada, indicando que o pólo da flexão está no limiar da instabilidade (está no SPD, semi-plano direito, próximo ao eixo imaginário). A frequência da oscilação é de aproximadamente 5 Hz, que é praticamente a frequência do 1<sup>o</sup> modo.

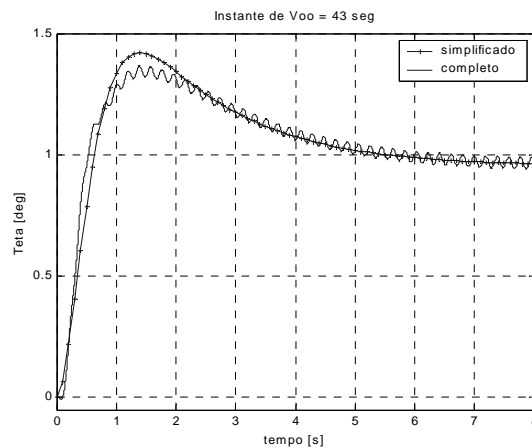


FIGURA 5.14: Resposta ao degrau unitário para o instante 43 seg. de vôo com modelo completo e simplificado, ganhos do método LQ.

Na FIGURA 5.15 fica claro que no instante 58 seg. de vôo, o sistema está instável já que a oscilação devido ao modo da flexão cresce rapidamente.

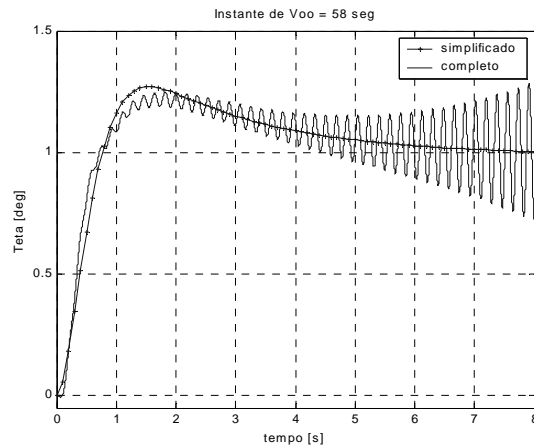


FIGURA 5.15: Resposta ao degrau unitário para o instante 58 seg. de vôo com modelo completo e simplificado, ganhos do método LQ.

## 5.2.2 Método Analítico

### 5.2.2.1 Dados do VLS para o Método Analítico

Para o cálculo dos ganhos através do método analítico, alguns dados precisam ser especificados: um tempo de subida maior que 0,8 segundos, para não excitar a flexão e um tempo de assentamento da ordem de 8 segundos.

Além do tempo de subida e assentamento, dois outros parâmetros precisam ser especificados:  $K_i|_{M_{\alpha \max}}$  (adotado para o máximo erro à rampa), ou seja, o valor de  $K_i$  para o máximo  $M_{\alpha}$  (que ocorre em 39 segundos de vôo) e o valor do pólo  $p_0$  (veja Equação (4.9)). Com base em alguns estudos preliminares, estes valores foram escolhidos como  $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,35$  e  $p_0 = 0,2$ .

No entanto foi necessário validar estes valores, desta forma os ganhos obtidos com estes valores e sua respectiva resposta no tempo foram denominado “caso de referência” e foi feita uma variação destes dois parâmetros para se analisar a variação da resposta no tempo. Estes resultados são apresentados logo abaixo como casos “1” à “13” e por fim é apresentada uma tabela resumida com a variação dos parâmetros necessários ao julgamento da melhor escolha destes valores.

5.2.2.2 Resposta do Método Analítico (Modelo Simplificado)

a) Caso Referência ( $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,35; p_0 = 0,2$ )

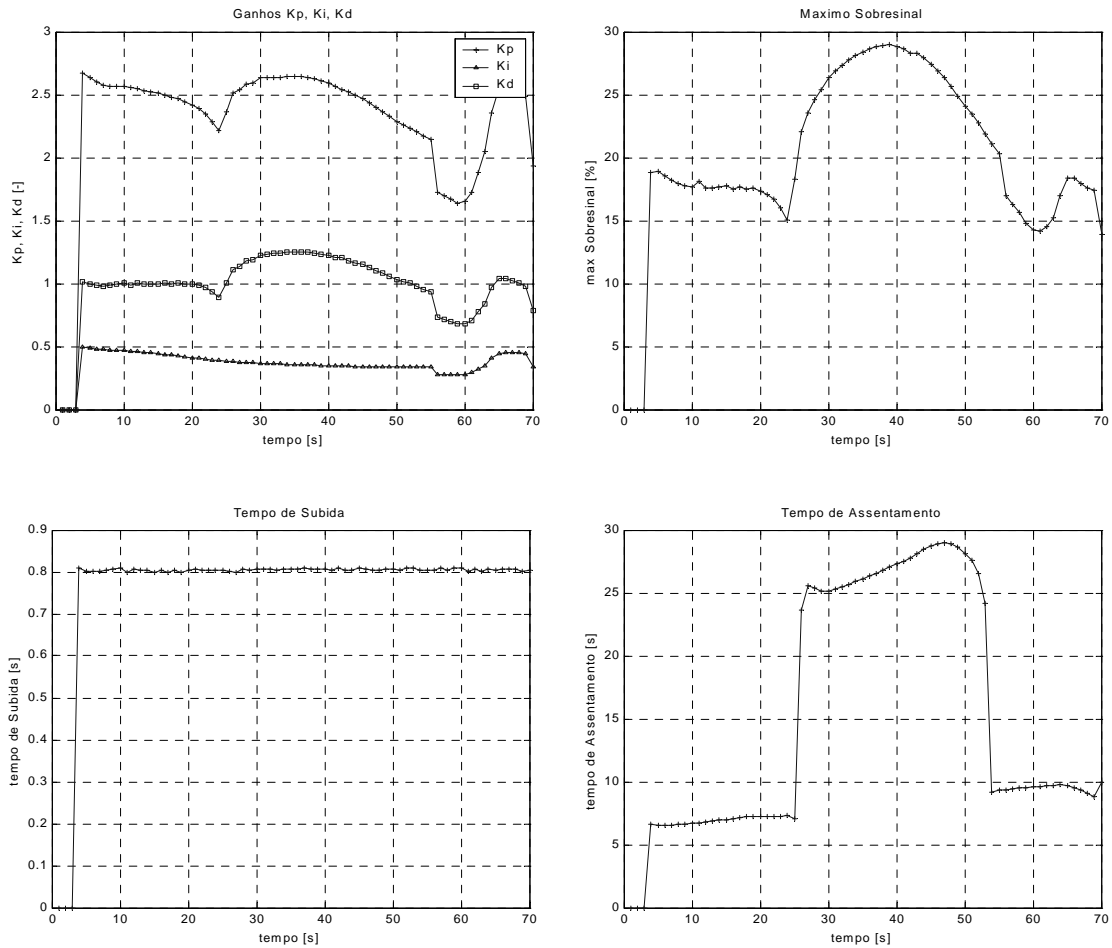


FIGURA 5.16: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com  $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,35; p_0 = 0,2$ .

b) Caso 1 ( $K_i|_{M_{z \max}} = 0,50$ ;  $p_0 = 0,2$ )

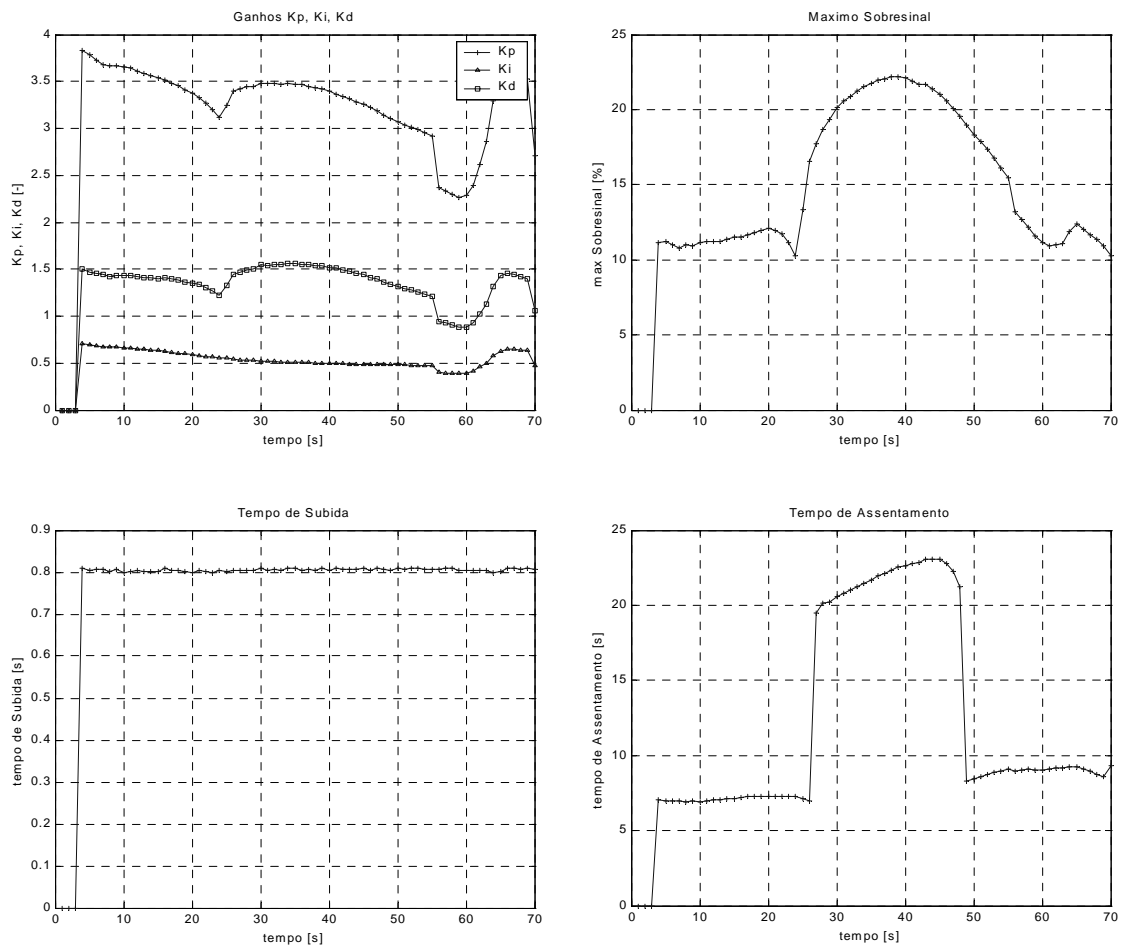


FIGURA 5.17: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com  $K_i|_{M_{z \max}} = 0,50$ ;  $p_0 = 0,2$ .

c) Caso 2 ( $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,70; p_0 = 0,2$ )

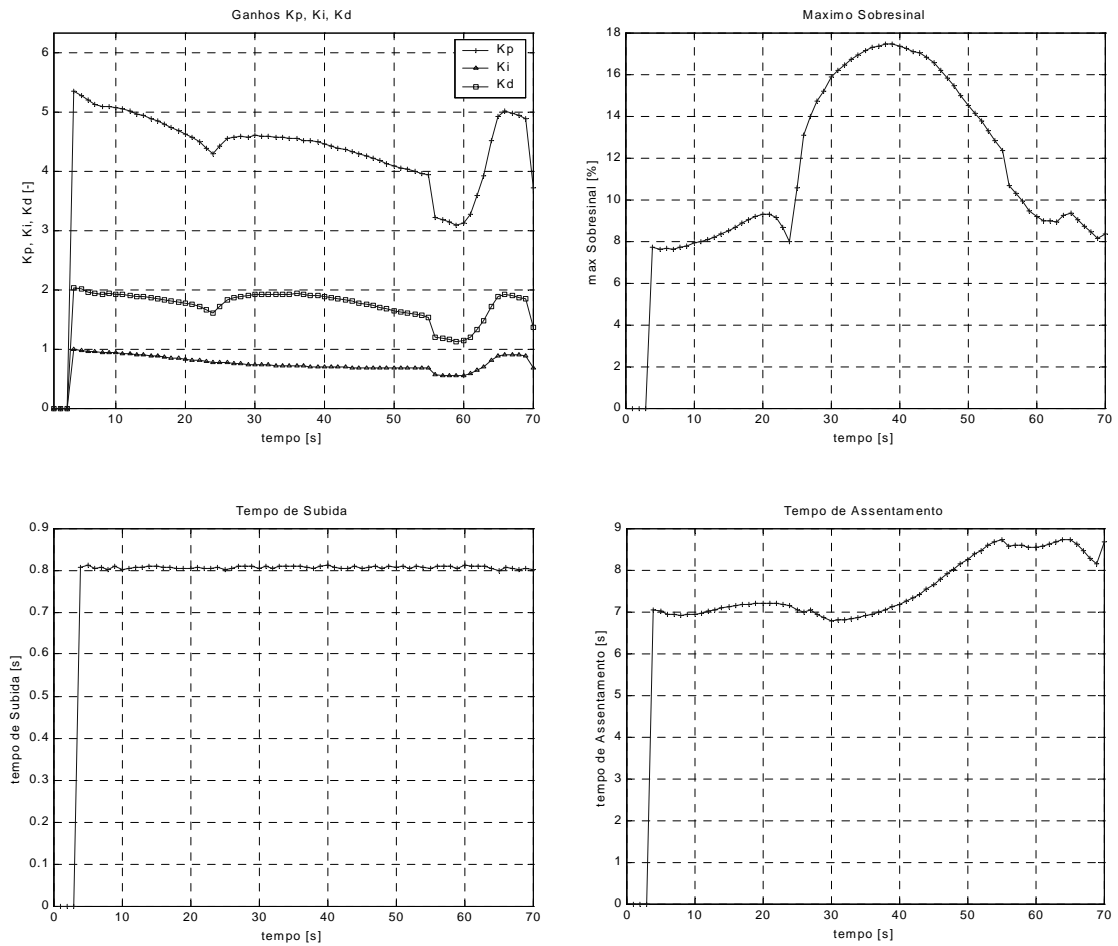


FIGURA 5.18: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com  $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,70; p_0 = 0,2$ .

d) Caso 3 ( $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,35; p_0 = 0,3$ )

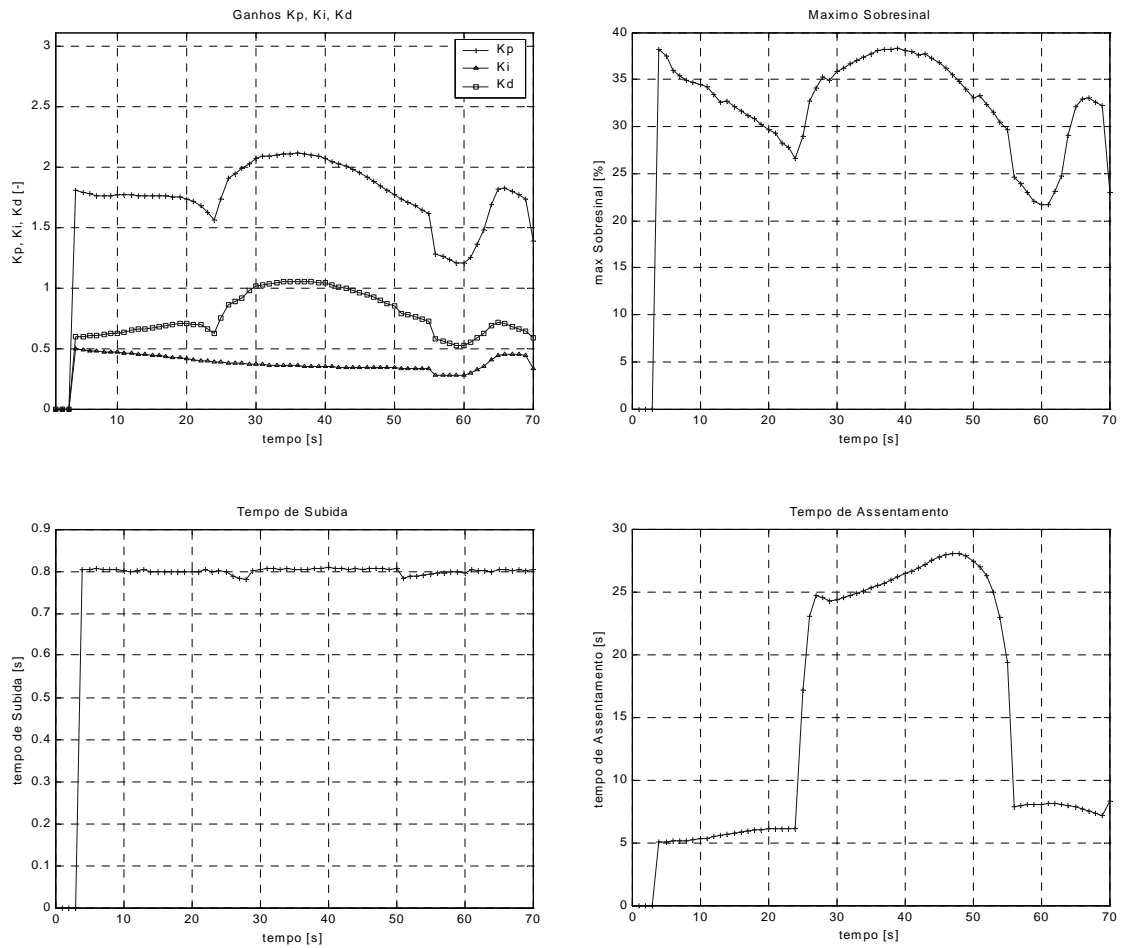


FIGURA 5.19: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado)

com  $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,35; p_0 = 0,3$ .



e) Caso 4 ( $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,35; p_0 = 0,5$ )

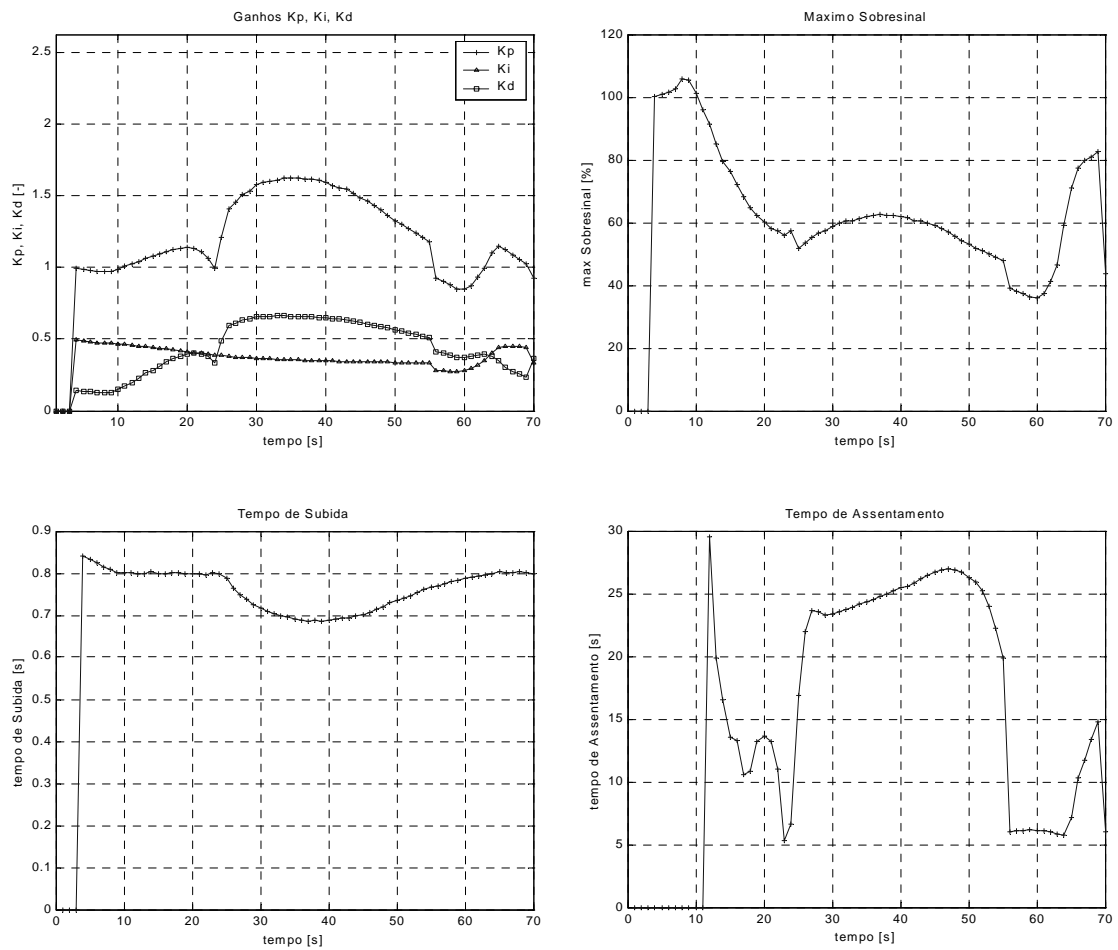


FIGURA 5.20: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com  $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,35; p_0 = 0,5$ .

f) Caso 5 ( $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,70; p_0 = 0,3$ )

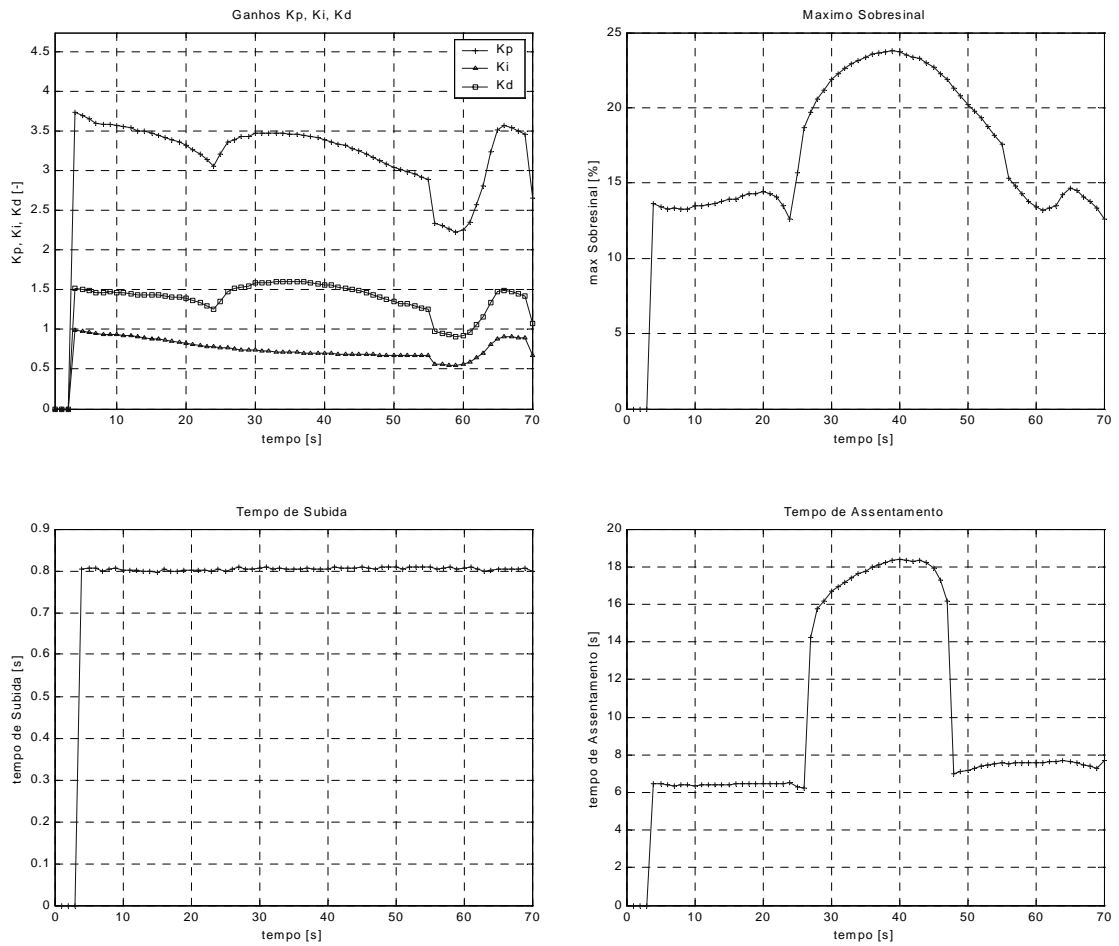


FIGURA 5.21: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com  $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,70; p_0 = 0,3$ .

g) Caso 6 ( $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,70; p_0 = 0,4$ )

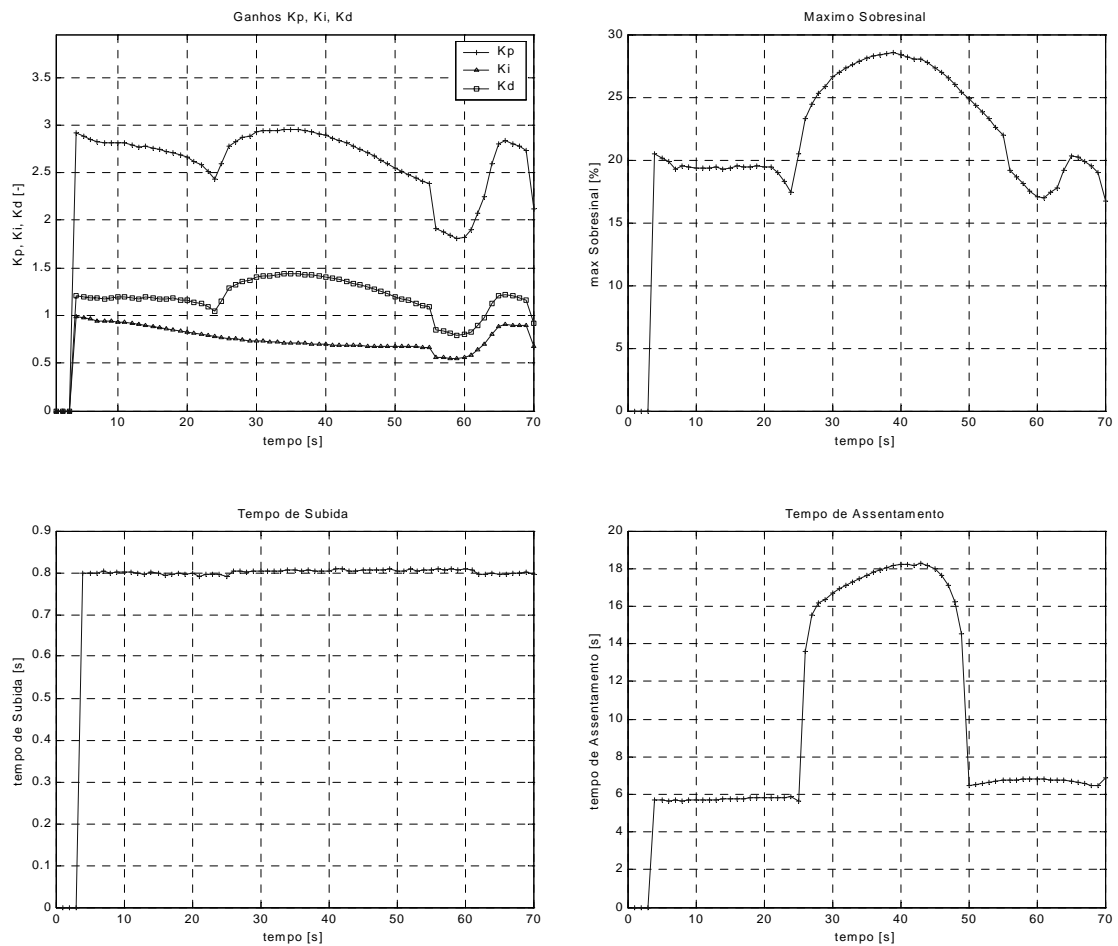


FIGURA 5.22: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com  $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,70; p_0 = 0,4$ .

h) Caso 7 ( $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,70; p_0 = 0,5$ )

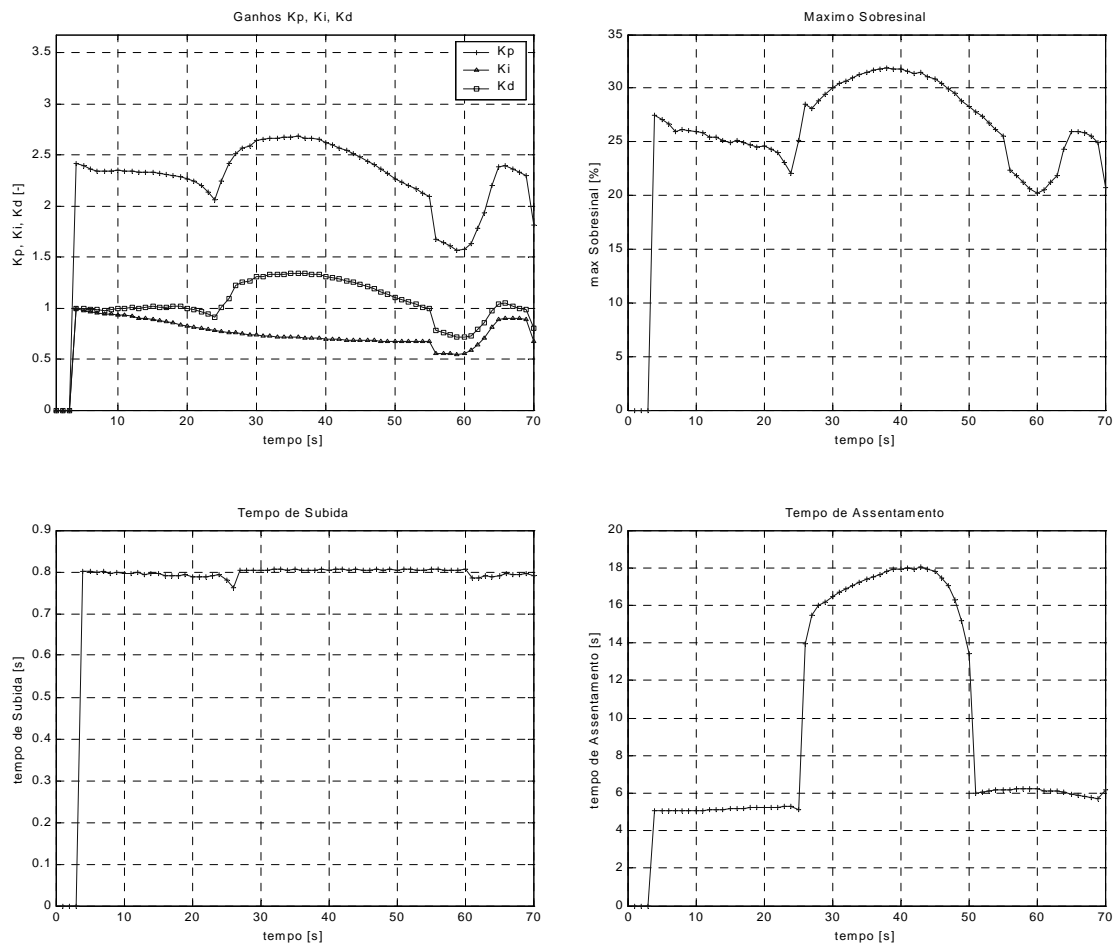


FIGURA 5.23: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com  $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,70; p_0 = 0,5$ .

i) Caso 8 ( $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,50$ ;  $p_0 = 0,3$ )

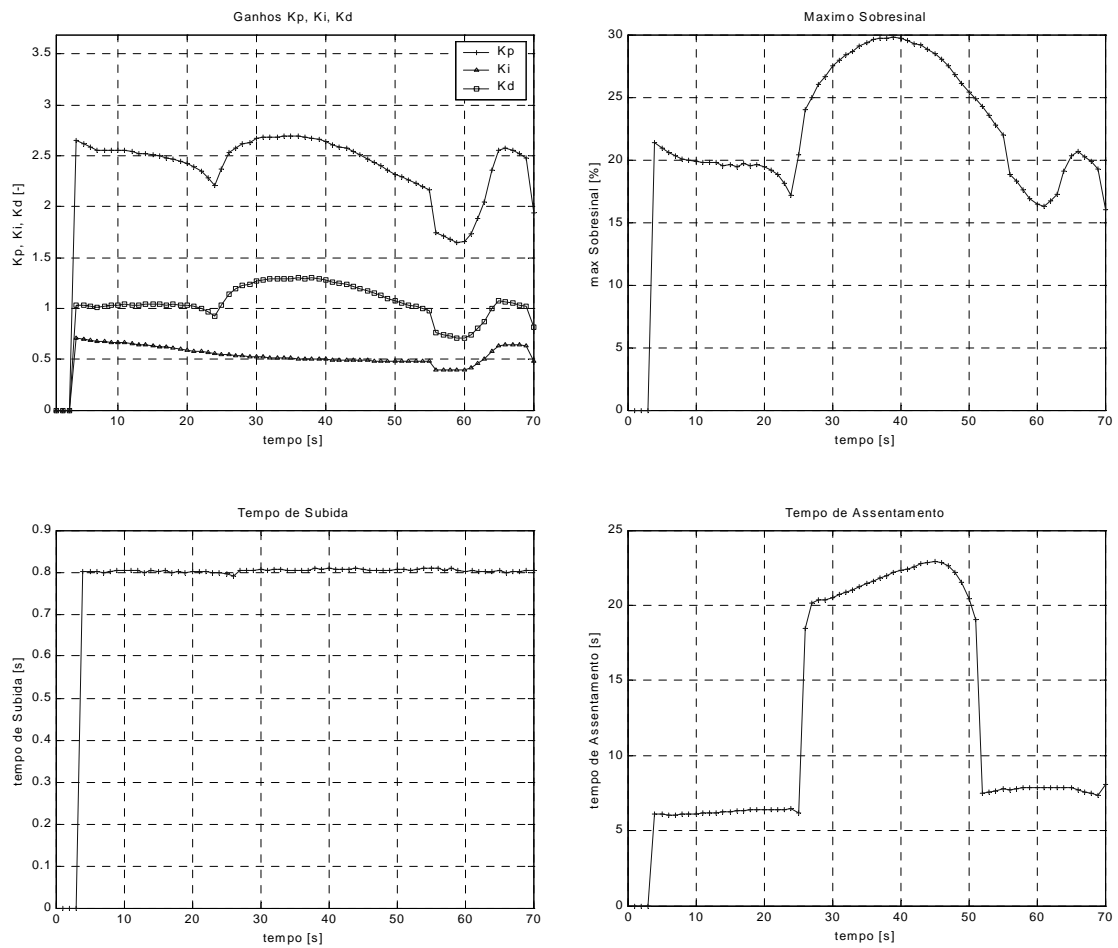


FIGURA 5.24: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com  $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,50$ ;  $p_0 = 0,3$ .

j) Caso 9 ( $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,50; p_0 = 0,4$ )

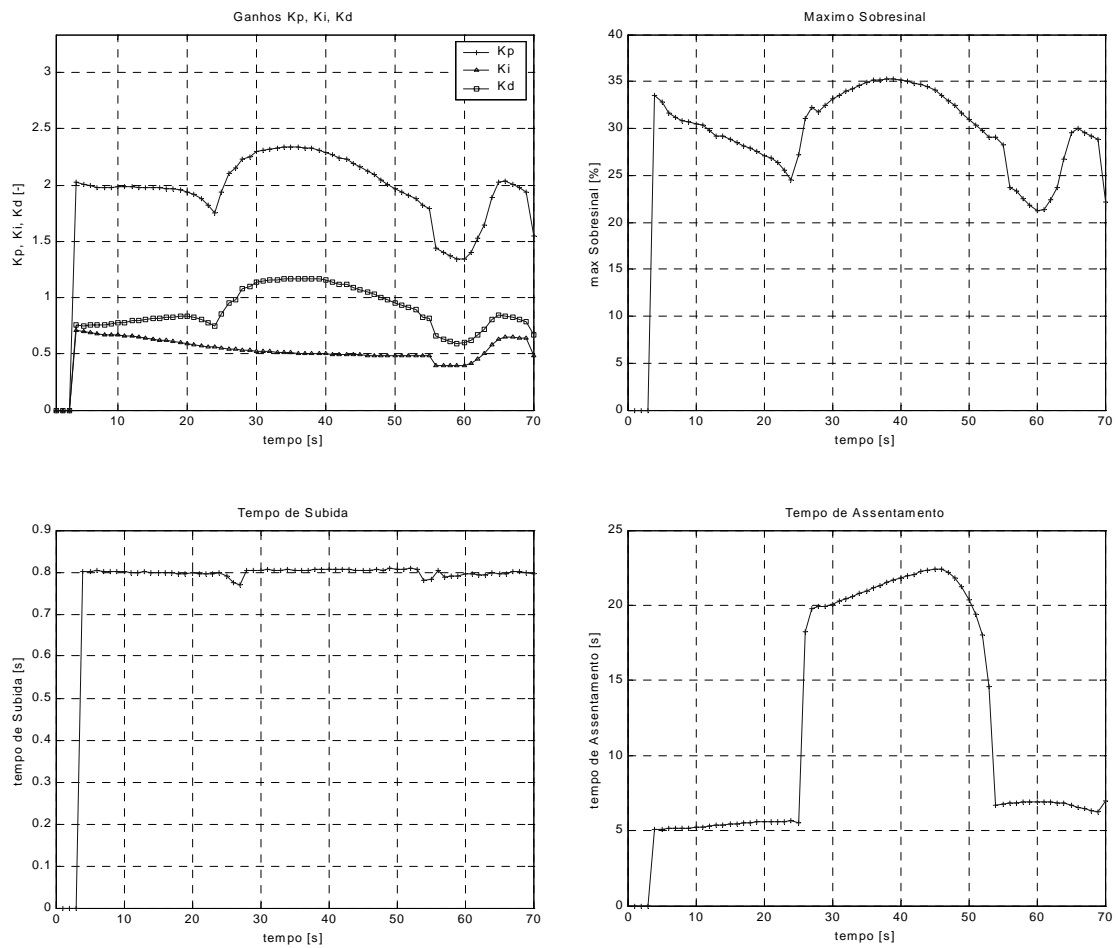


FIGURA 5.25: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com  $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,50; p_0 = 0,4$ .

k) Caso 10 ( $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,50; p_0 = 0,5$ )

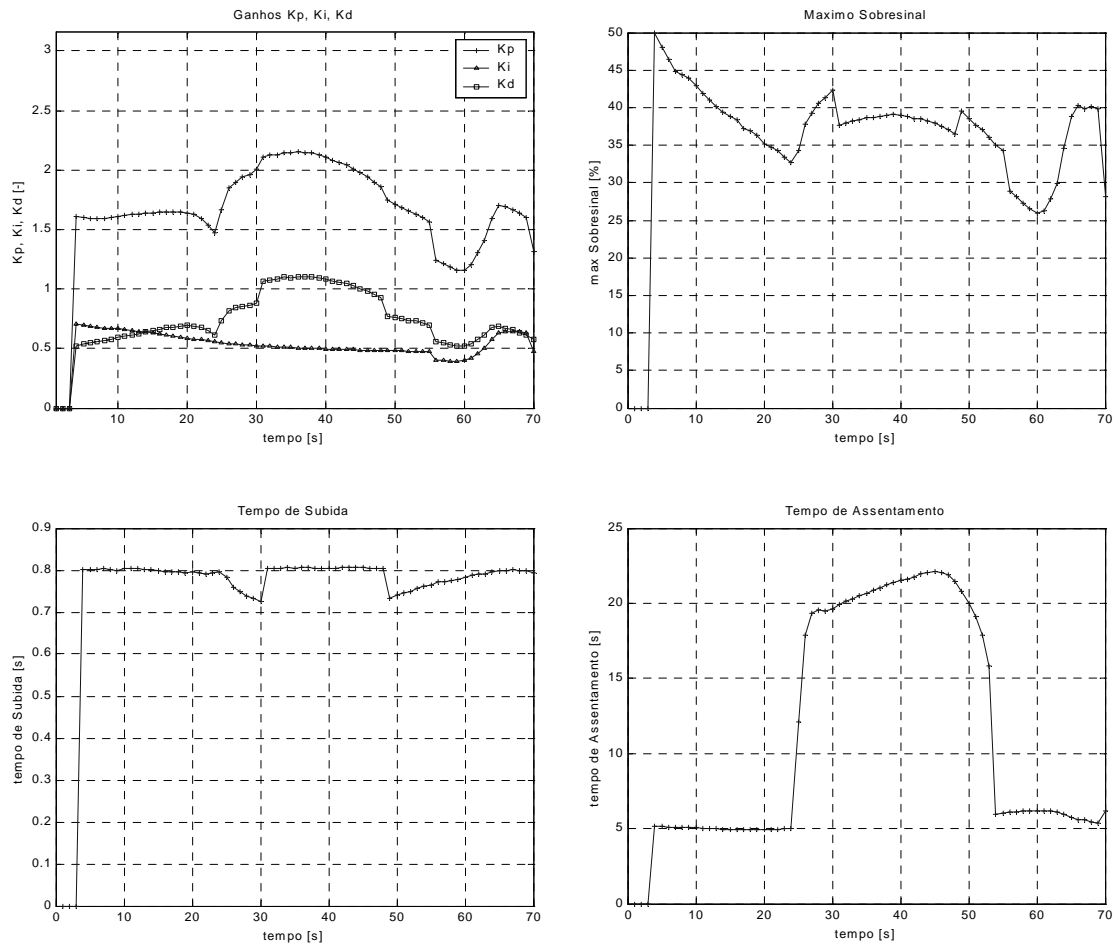


FIGURA 5.26: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com  $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,50; p_0 = 0,5$ .

l) Caso 11 ( $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,40; p_0 = 0,3$ )

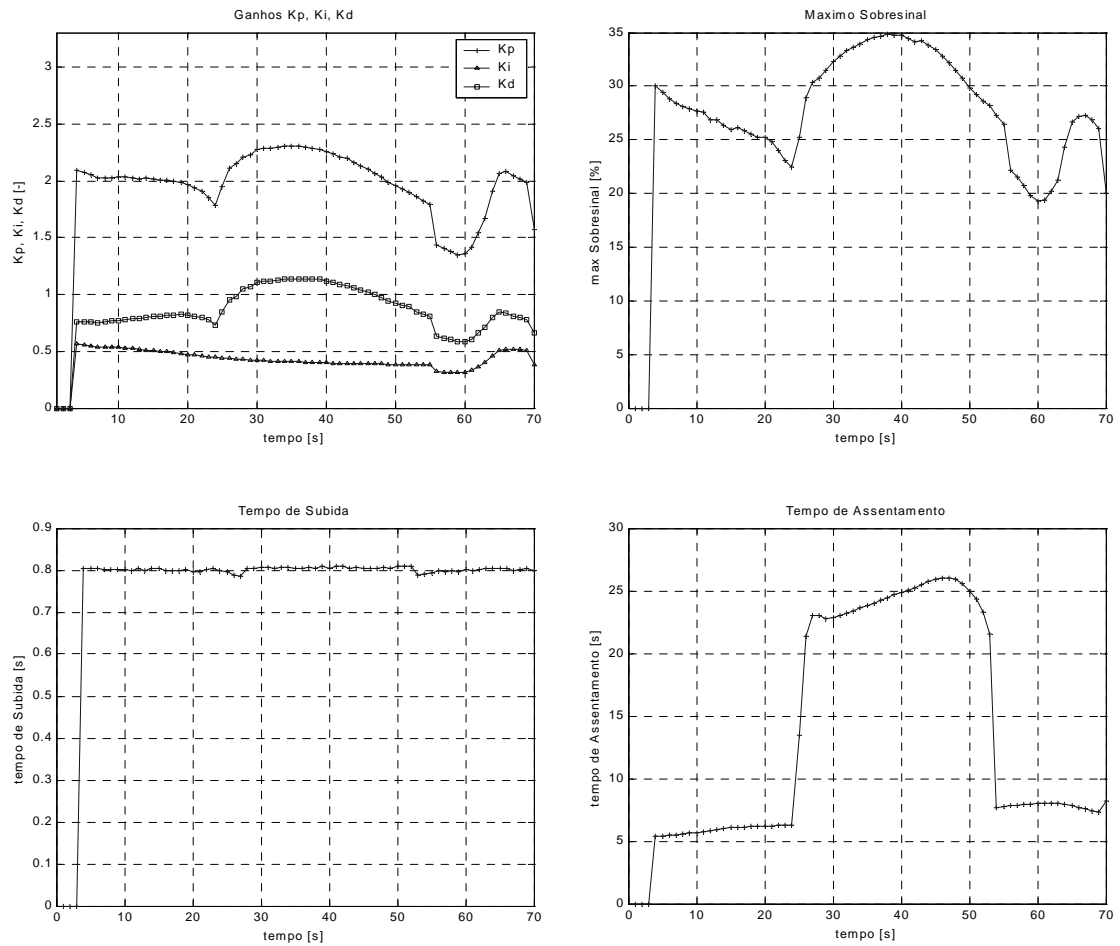


FIGURA 5.27: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com  $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,40; p_0 = 0,3$ .



m) Caso 12 ( $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,40$ ;  $p_0 = 0,4$ )

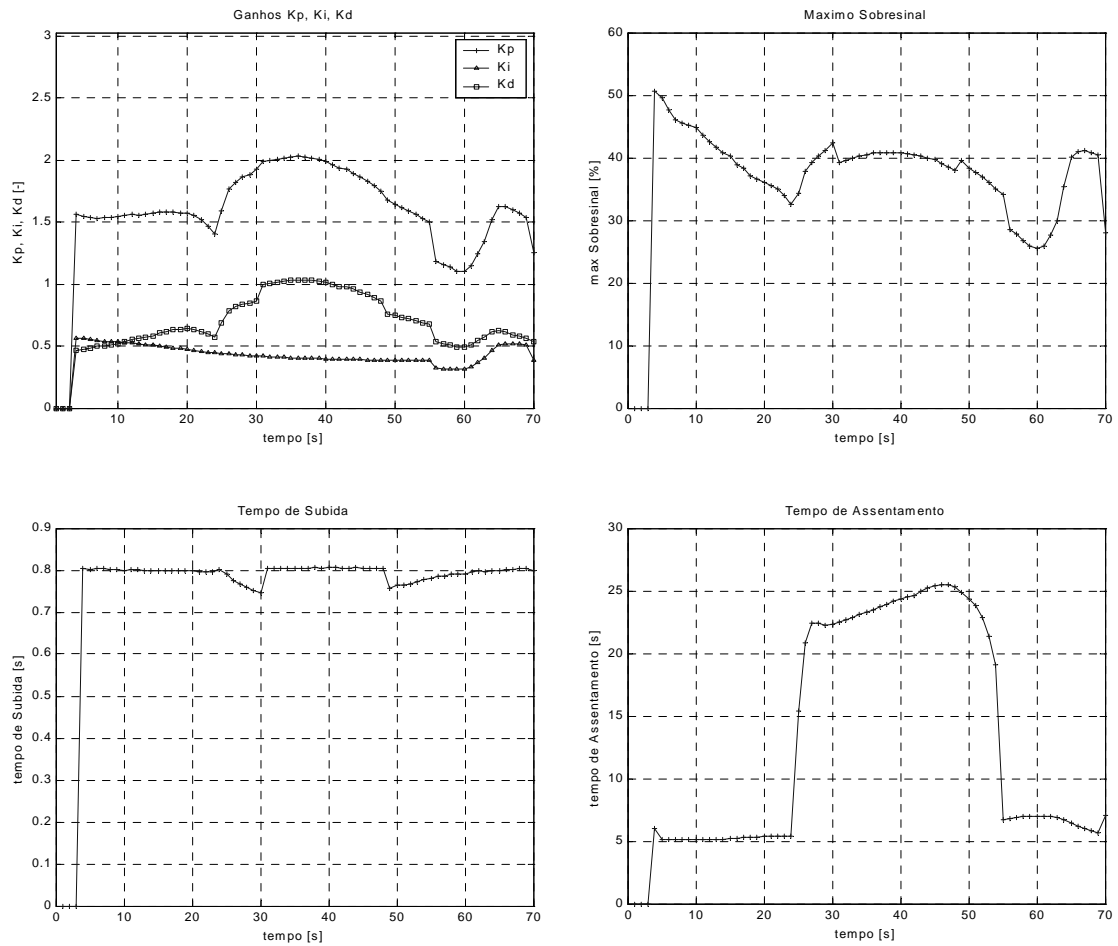


FIGURA 5.28: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado) com  $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,40$ ;  $p_0 = 0,4$ .

n) Caso 13 ( $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,40; p_0 = 0,5$ )

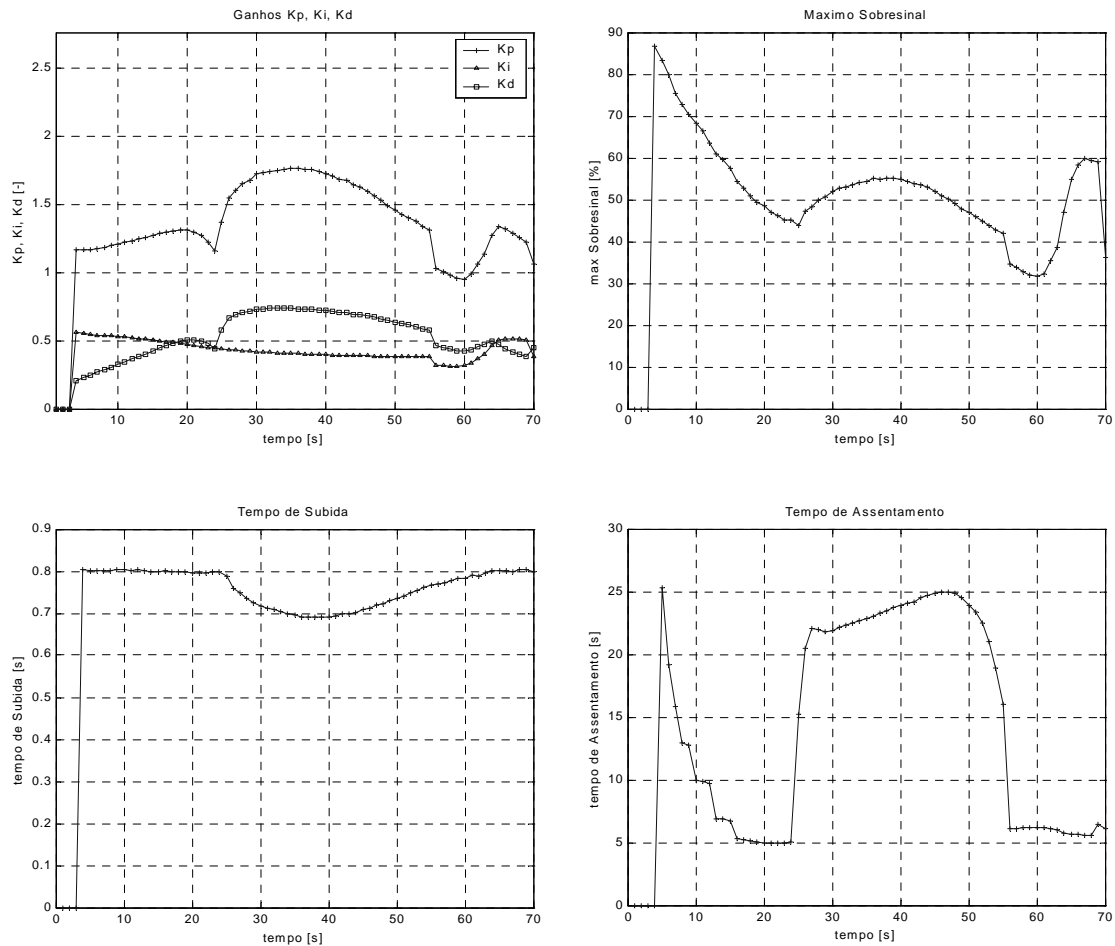


FIGURA 5.29: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo simplificado)

com  $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,40; p_0 = 0,5$ .

Os parâmetros mais importantes dos casos apresentados acima são o máximo valor de  $K_p$  ao longo do vôo pois é igual ao máximo comando da tubeira para este modelo simplificado (o batente de projeto é  $3^\circ$ ), o máximo valor do sobresinal ( $M_p$ ), o máximo tempo de assentamento ( $t_{\text{ass}}$ ) e o mínimo tempo de

subida ( $t_{sub}$ ). Como avaliação comparativa interessa  $K_d$  maior pois beneficia o ciclo limite (veja Bueno e Leite Filho, 2003)

É desejada uma certa folga do batente de comando, pois representa falta de comando e instabilizaria o lançador. Como não existe dinâmica da tubeira no modelo simplificado, o máximo  $K_p$  é o máximo comando da tubeira, já que este máximo ocorre logo após o início do degrau unitário. Ou seja, deseja-se o menor valor de máximo  $K_p$ .

O valor do sobresinal deve ser o menor possível pois associado com a pressão dinâmica gera os esforços na estrutura (menor força aerodinâmica possível).

O tempo de assentamento adequado seria 8 segundos ou o menor possível, pois este parâmetro mostra a rapidez com que o sistema atinge o estado estacionário.

TABELA 5.2: Resumo da variação dos parâmetros de resposta no tempo com parâmetros de ajuste  $K_i|_{M_{\alpha max}}$  e  $p_0$  utilizando modelo simplificado.

<b>Caso</b>	$K_i _{M_{\alpha max}}$	$p_0$	<b>max <math>K_p</math></b>	<b>max <math>M_p</math></b>	<b>max <math>t_{ass}</math></b>	<b>min <math>t_{sub}</math></b>
	[-]	[-]	[-]	[%]	[s]	[s]
Referência	0,35	0,20	2,7	29,0	29,0	0,80
1	<b>0,50</b>	0,20	3,8	22,2	23,1	0,80
2	<b>0,70</b>	0,20	5,3	17,4	8,7	0,80
3	0,35	<b>0,30</b>	2,1	38,3	28,0	0,78
4	0,35	<b>0,50</b>	1,6	105,7	29,5	0,68
5	<b>0,70</b>	<b>0,30</b>	3,7	23,8	18,4	0,80
6	<b>0,70</b>	<b>0,40</b>	3,0	28,5	18,3	0,79
7	<b>0,70</b>	<b>0,50</b>	2,7	31,9	18,0	0,76
8	<b>0,50</b>	<b>0,30</b>	2,7	29,8	22,9	0,79
9	<b>0,50</b>	<b>0,40</b>	2,3	35,3	22,4	0,77
10	<b>0,50</b>	<b>0,50</b>	2,2	50,0	22,1	0,72
11	<b>0,40</b>	<b>0,30</b>	2,3	34,9	26,0	0,78
12	<b>0,40</b>	<b>0,40</b>	2,0	50,5	25,5	0,75
13	<b>0,40</b>	<b>0,50</b>	1,8	86,8	25,3	0,69

O tempo de subida deve ser maior que 0,8 seg. para não excitar os modos de flexão devido a comandos abruptos da tubeira móvel.

A tendência com aumento de  $K_i|_{M_{\alpha \max}}$  é:  $K_p$  aumenta,  $M_p$  diminui,  $t_{\text{ass}}$  diminui e  $t_{\text{sub}}$  sobe ligeiramente (veja casos '11', '8' e '5', respectivamente). Quando  $p_0$  é aumentado, a tendência é uma diminuição de  $K_p$ , um aumento de  $M_p$ , uma redução de  $t_{\text{ass}}$  e  $t_{\text{sub}}$  aumenta ligeiramente (veja casos '8', '9' e '10', respectivamente). Diferentemente do que era esperado,  $p_0$  tem pequena influência no tempo de assentamento.

Os casos que parecem os mais adequados são os casos 'referência', '3', '7', '8', '9' e '11', pois os outros casos possuem valores excessivos de  $K_p$  (maior ou igual a  $3^\circ$ ) ou sobresinal (maior que 50%).

Considerando os casos que possuem uma certa folga no batente de comando, o grupo de casos nesta condição são '3', '9' e '11'. Destes três, o melhor é o caso '11' com melhor balanço entre a folga do batente e o máximo sobresinal.

Os casos 'ref.' ('referência'), '7' e '8' possuem mesmo valor de batente máximo (valor de 2,7) que não é muito folgado em relação aos  $3^\circ$  de projeto. Deste três, o mais adequado é o caso '7' pois apesar de possuir um sobresinal um pouco maior que do caso 'ref.' (10% maior) e um tempo de subida menor (cerca de 5% menor), possui uma melhora considerável no tempo de assentamento (38% menor).

Assim, o caso adotado como ideal para o estudo analítico é o '7' ( $K_i|_{M_{\alpha \max}} = 0,70$ ,  $p_0 = 0,5$ ) pois apesar de possuir a mesma folga do batente de comando do caso de referência (2,7) ainda está dentro do batente de  $3^\circ$ . Apesar do sobresinal um pouco maior e do tempo de subida um pouco menor, a melhora no tempo de assentamento foi importante para escolha deste caso. O valor do tempo mínimo de subida não chega a ser comprometedora pois aconteceu em alguns instantes do voo.

Na FIGURA 5.30 é apresentada a resposta ao degrau do modelo simplificado de corpo rígido, aplicando-se a metodologia Analítica (caso '7'). Apesar das diferenças nas duas curvas, os valores dos parâmetros no tempo não variaram tanto como no método LQ (veja Tabela 5.1), com um tempo de assentamento semelhante ao LQ, um tempo de subida melhor em 39 seg. e um sobresinal máximo menor (32 contra 43% para o LQ em 39 seg. de vôo).

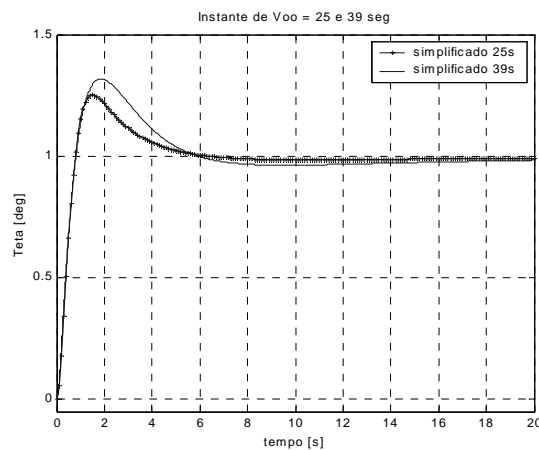


FIGURA 5.30: Resposta ao degrau unitário (método Analítico, modelo simplificado).

Com relação aos requisitos dos método Analítico, a resposta deste dois instantes foi boa para o tempo de subida, pois os valores ficaram em torno de 0,8 seg. No entanto, o resultado do tempo de assentamento foi ruim, pois ficou bem acima de 8 seg. para o instante 39 seg. de vôo.

TABELA 5.3: Comparação de instantes de vôo para método Analítico.

	Instante de vôo	
	25 seg	39 seg
<b>Máximo sobresinal</b>	25 %	32 %
<b>Tempo de subida (100 %)</b>	0,78 seg	0,81 seg
<b>Tempo de assentamento (2%)</b>	5 seg	18 seg

### 5.2.2.3 Resposta do Método Analítico (Modelo Completo)

Utilizando os mesmos ganhos obtidos com o modelo +simplificado (caso '7' da análise do modelo simplificado), agora se faz a simulação no tempo para os diversos instantes de voo com o modelo completo. Os resultados podem ser vistos na FIGURA 5.31 e FIGURA 5.32.

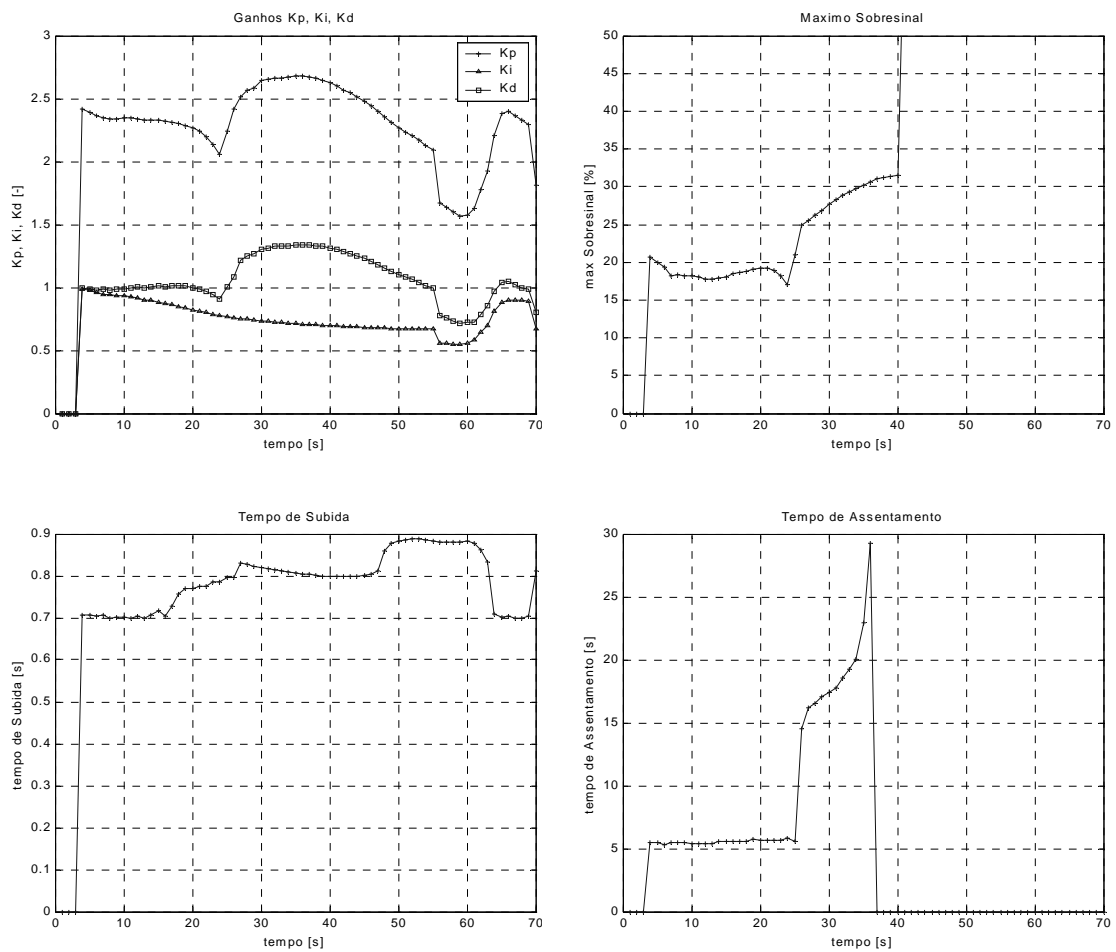


FIGURA 5.31: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo completo).

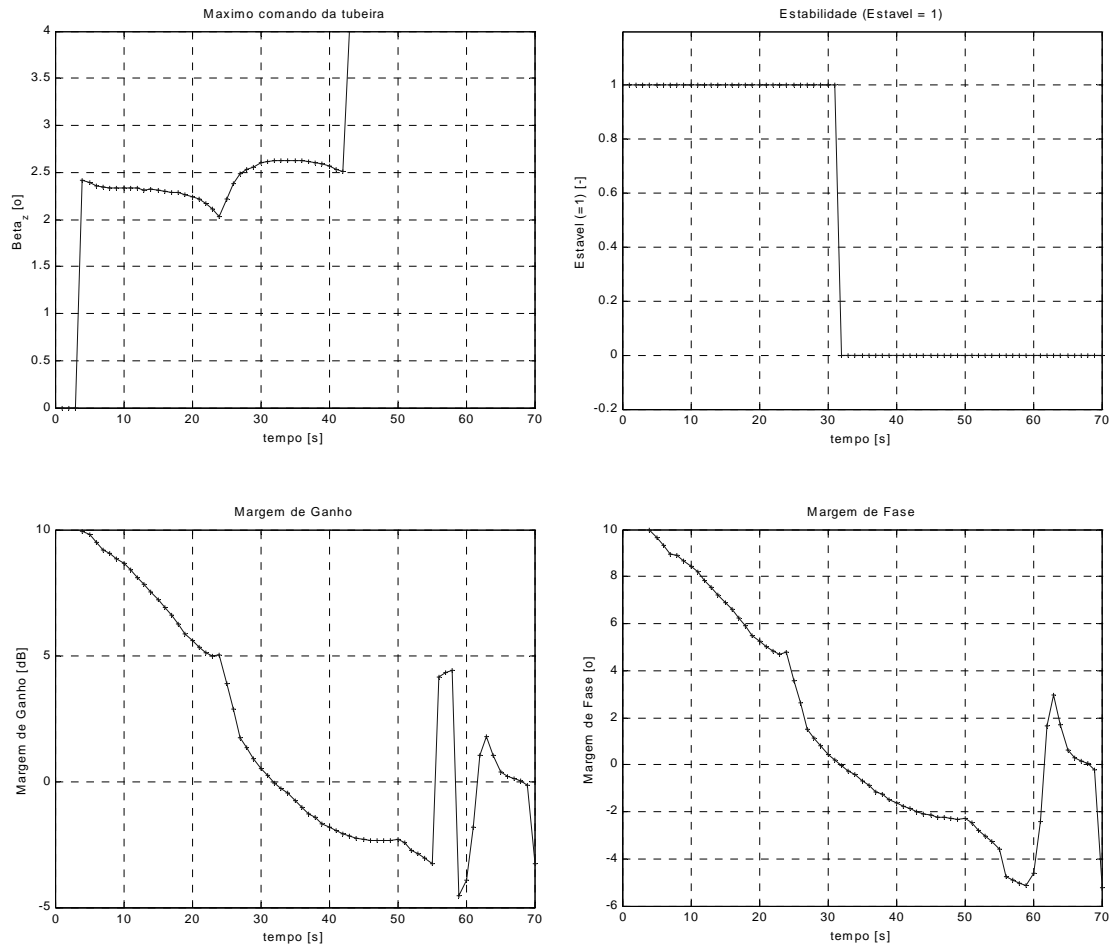


FIGURA 5.32: Outros parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo completo) e margem de fase e ganho.

Analisando a resposta antes da instabilidade, o máximo sobresinal se manteve coerente com a simulação como o modelo simplificado, mas o tempo de subida foi degradado, passando para um mínimo de praticamente 0,7 e se mantendo próximo deste patamar por um certo período. O tempo de assentamento piorou alcançando 30 segundos, porém o máximo comando permaneceu conforme o esperado (abaixo de 2,7). As margens de fase e ganhos tiveram um máximo no início da simulação com valores de quase  $10^{\circ}$  e 10 dB, e diminuíram ao longo do voo.

### 5.2.3 Estudo Especial: Filtro *Notch*

O filtro *Notch* que visa atenuar os efeitos dos modos de flexão foi colocado no canal de realimentação pois este é o canal de velocidade, mais sensível aos efeitos das vibrações do que o canal direto. Além disso, a sua dinâmica no canal de realimentação acarretaria em pouca degradação da resposta no tempo.

No entanto, contradizendo as hipóteses anteriores, estudos preliminares indicaram que um reposicionamento deste filtro do canal direto melhoraria o desempenho do sistema como um todo. Desta forma, são apresentados os resultados do sistema com o filtro *Notch* no canal direto ao invés do canal de realimentação, conforme FIGURA 5.33.

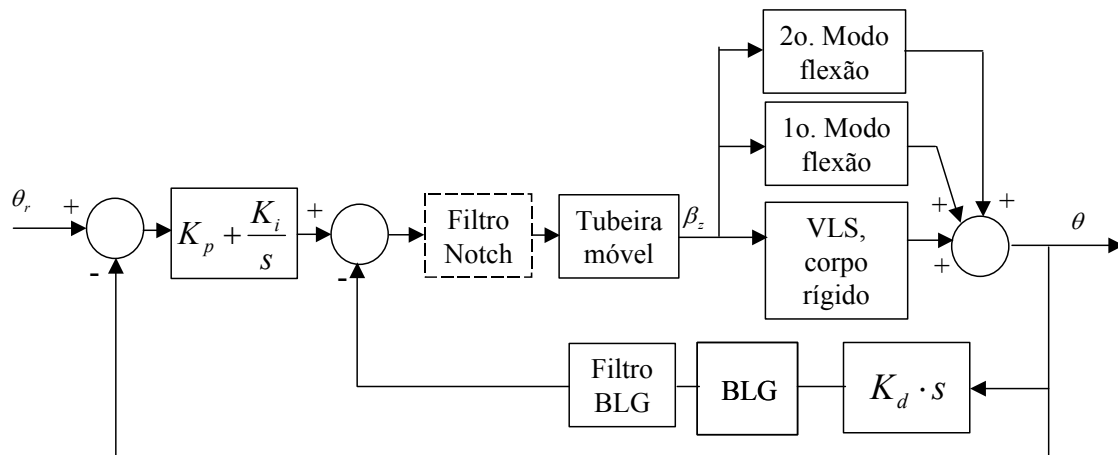


FIGURA 5.33: Modelo completo com filtro *Notch* repositado no canal direto.

Os resultados são apresentados a seguir, utilizando para isso, os ganhos do método Analítico (FIGURA 5.34 e FIGURA 5.35):



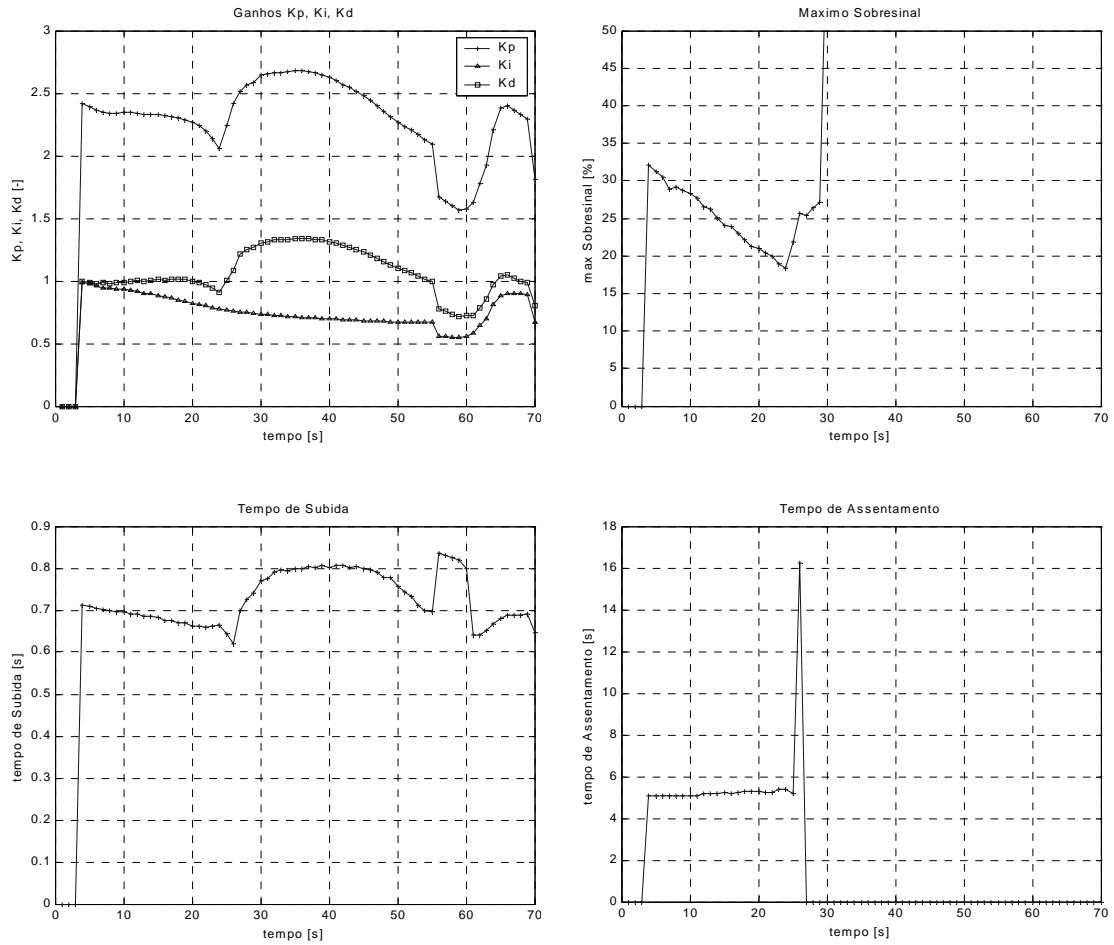


FIGURA 5.34: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo completo com filtro *Notch* no canal direto).

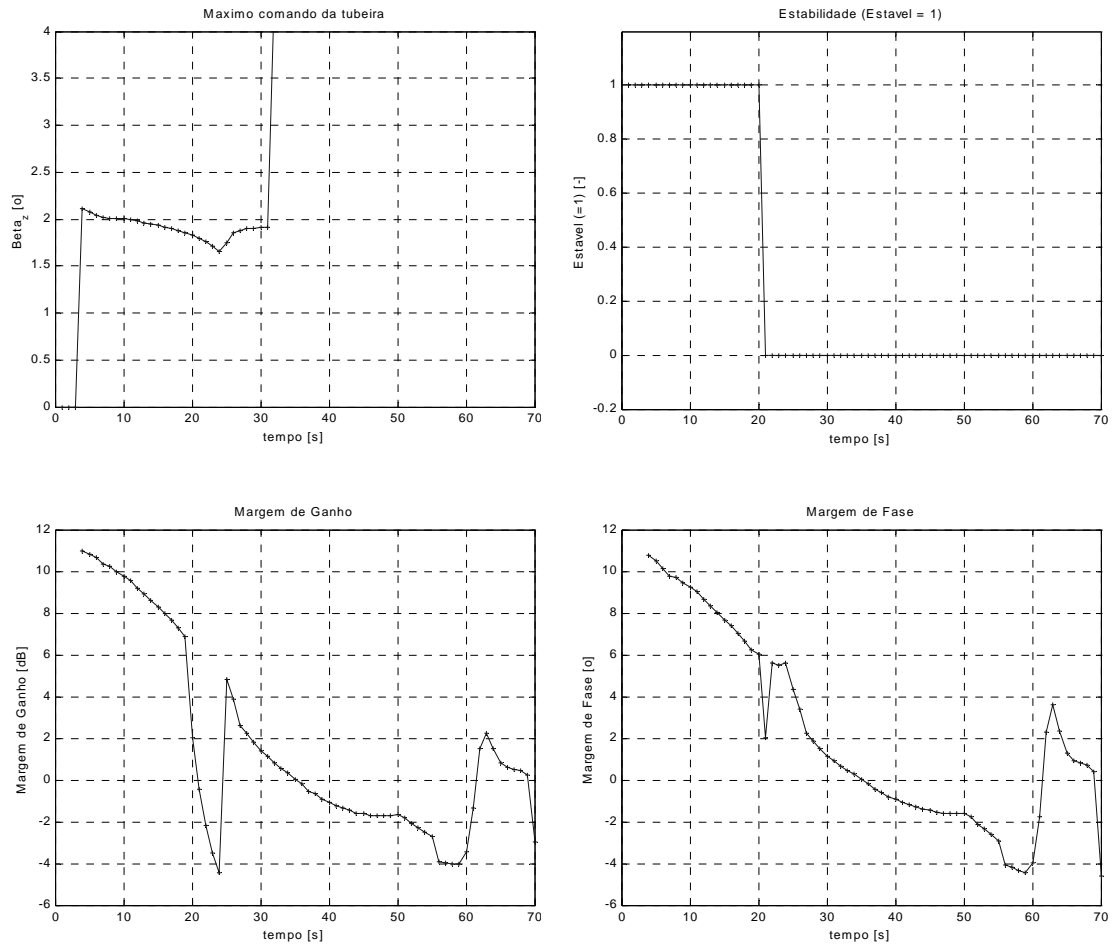


FIGURA 5.35: Outros parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo completo com filtro *Notch* no canal direto) e margem de fase e ganho.

Claramente, houve piora com o reposicionamento do filtro *Notch* no canal direto. A instabilidade foi atingida mais rapidamente, o tempo de subida baixou ainda mais (abaixo de 0,7 seg.), porém o comando da tubeira móvel diminuiu, ficando mais longe do batente (antes da instabilidade).

Porém, outra consideração do estudo preliminar, era que o aumento da frequência sintonizada do filtro *Notch* melhoraria a resposta no tempo. Realmente, aumentando-se a frequência atual de projeto de 30 rad/s (frequência próxima do 1º modo) para 40 rad/s, os resultados melhoraram bastante, como pode ser visto na FIGURA 5.36 e FIGURA 5.37.

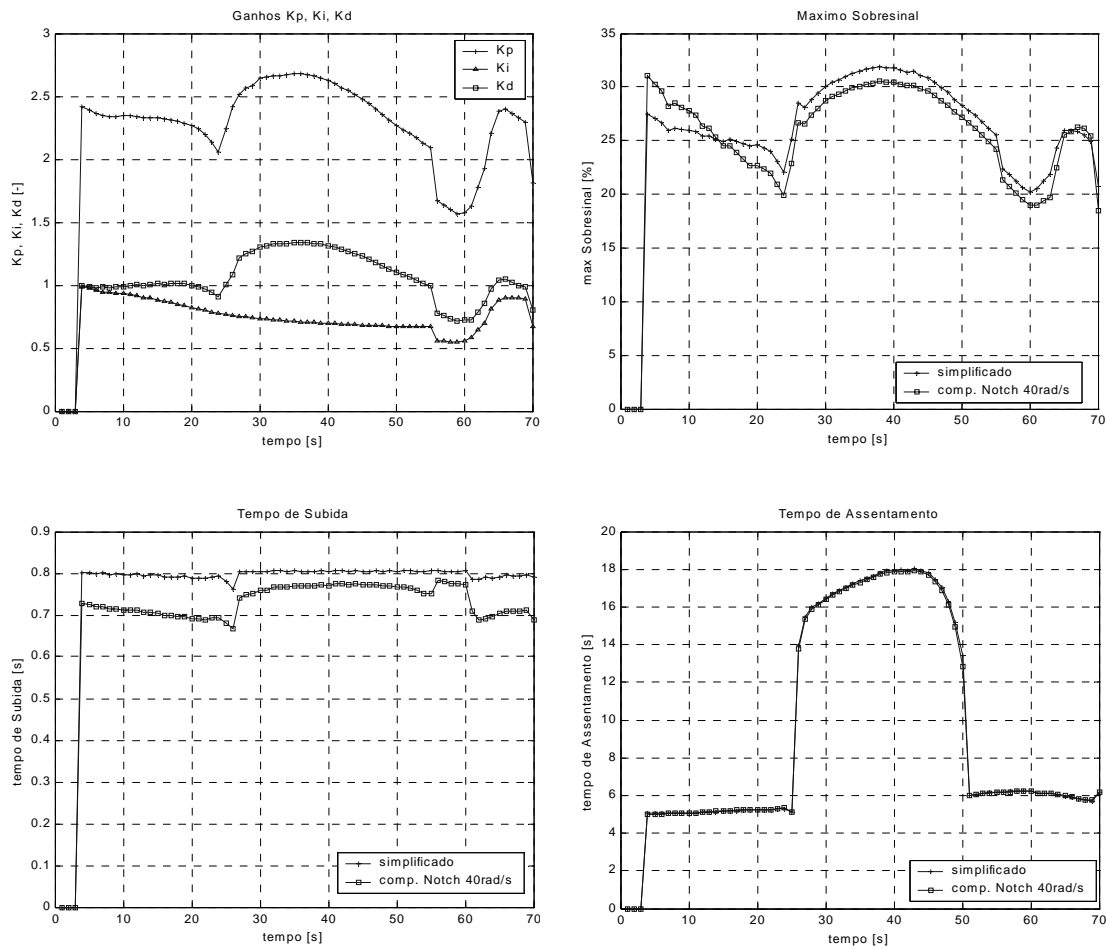


FIGURA 5.36: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário, comparando a resposta do modelo simplificado com o modelo completo com filtro *Notch* à 40 rad/s no canal direto.

Com esse ajuste do filtro *Notch*, o sistema se tornou estável durante todo vôo com resultados de resposta no tempo muito semelhantes às obtidas com o modelo simplificado: tempo de assentamento praticamente igual ao longo do vôo (máximo de 18 seg.), um sobresinal máximo menor e um tempo de subida menor que o do modelo simplificado, infelizmente atingindo valores mínimos próximos a 0,66 seg. O máximo comando da tubeira móvel obteve uma folga maior que o do modelo simplificado (máximo  $K_p$  de 2,7), ficando abaixo de 2,3°.

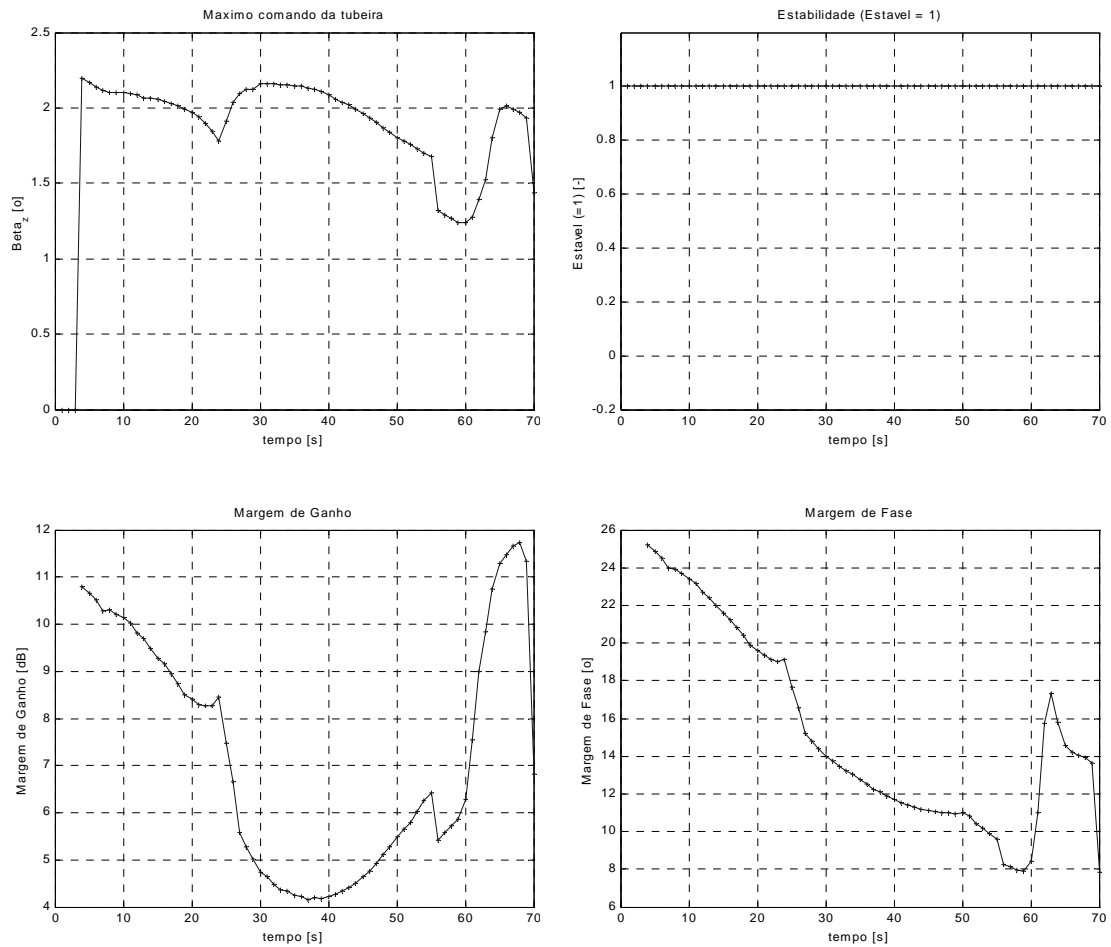


FIGURA 5.37: Outros parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário (modelo completo com filtro *Notch* à 40 rad/s no canal direto) e margem de fase e ganho.

A margem de ganho ficou acima de 6 dB na maioria do voo, atingindo um mínimo próximo do instante de máximo  $M_\alpha$  em torno 4,2 dB. A margem de fase não atingiu resultados tão satisfatórios quanto a margem de ganho, ficando durante todo o voo abaixo do valor desejado de 30° atingindo um mínimo de 8° próximo de 60 seg. de voo.

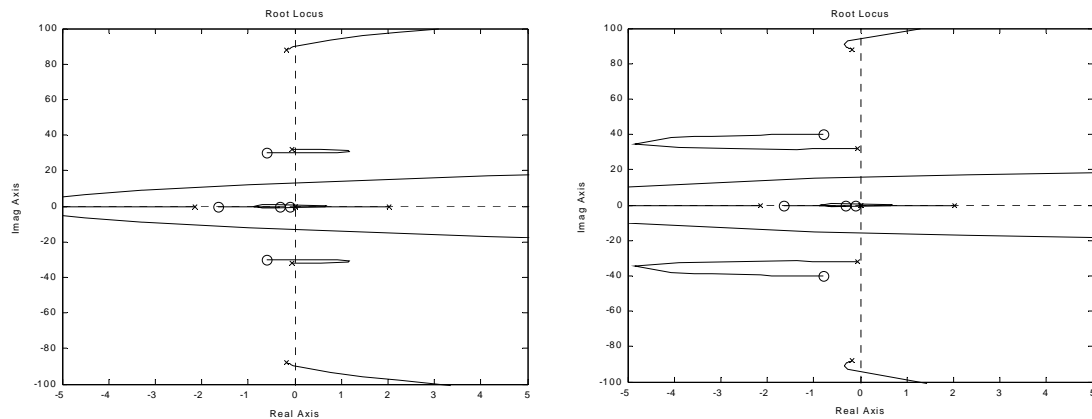


FIGURA 5.38: Lugar das raízes (zoom) do modelo completo (filtro *Notch* no canal direto) no instante 39 seg. de vô: (a) filtro *Notch* sintonizado em 30 rad/s; (b) filtro *Notch* sintonizado em 40 rad/s.

A relação da frequência de sintonização do filtro *Notch* no canal direto com o lugar das raízes pode ser visto na FIGURA 5.38. Com a frequência em 30 rad/s, os pólos complexos do 1<sup>o</sup> modo passam pelo SPD em direção aos zeros do filtro *Notch*. Ao se aumentar a frequência, o caminho das raízes acontece somente no SPE, garantindo a estabilidade do 1<sup>o</sup> modo. Importante observar, que o caminho dos pólos do 2<sup>o</sup> modo também se afastaram no início do SPD (apesar de “caminharem” nesta direção), melhorando também a margem de estabilidade devido ao 2<sup>o</sup> modo.

Falta checar se o filtro *Notch* no canal de realimentação sintonizado à 40 rad/s obtêm bons resultados quando comparado ao seu posicionamento no canal direto. Este resultados comparativos podem ser vistos na FIGURA 5.39 e FIGURA 5.40.

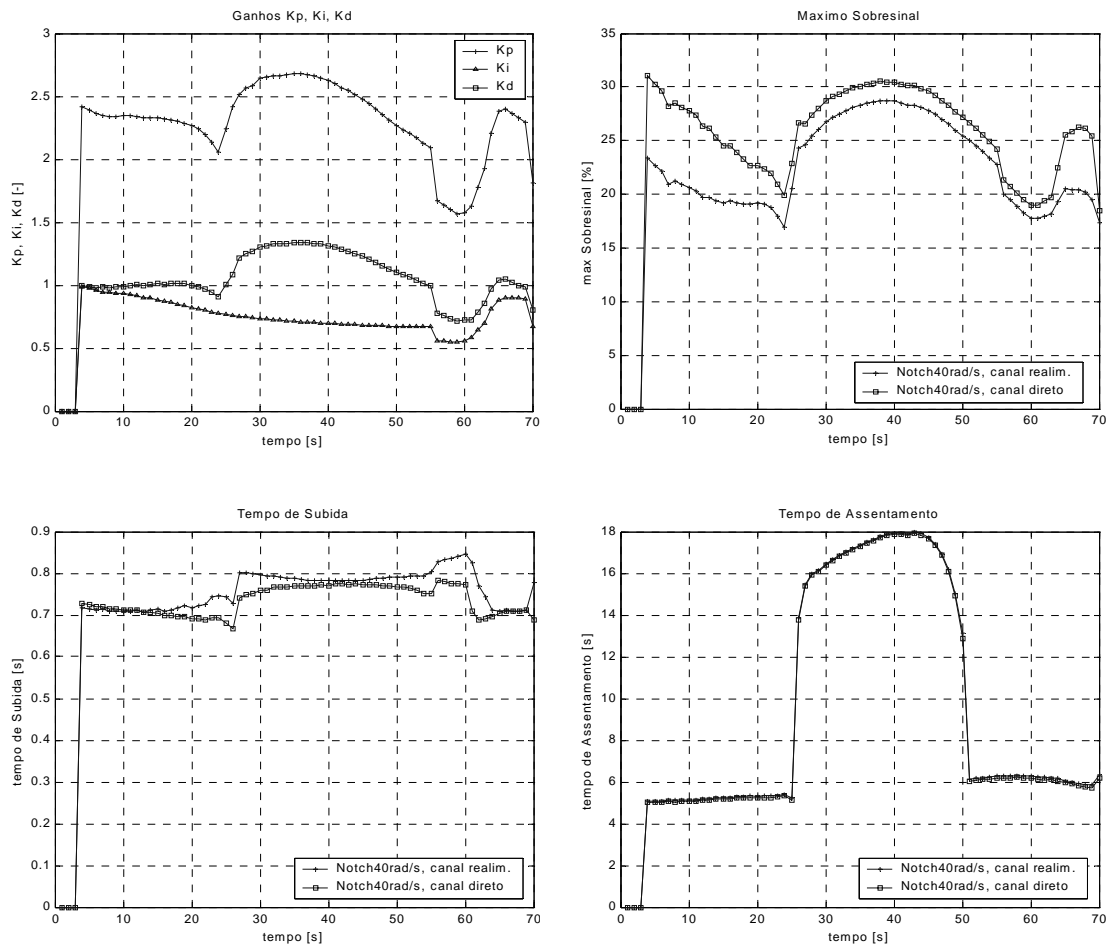


FIGURA 5.39: Ganhos do controlador (método Analítico) e parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário, modelo completo com filtro *Notch* à 40 rad/s no canal direto e de realimentação.

O tempo de assentamento ficou quase idêntico nos dois casos. O sobresinal obteve maiores valores com o *Notch* no canal direto mas, como consequência direta, os comandos da tubeira foram menores para esta situação com valores em torno de  $2,3^\circ$ , enquanto que no canal de realimentação, o máximo foi de  $2,7^\circ$  (pouca folga). O tempo de subida foi melhor com o filtro no canal de realimentação, mantendo-se mais tempo durante o vôo próximo à 0,80 seg. e com um mínimo de 0,70 seg. ao invés de 0,66 no canal direto.

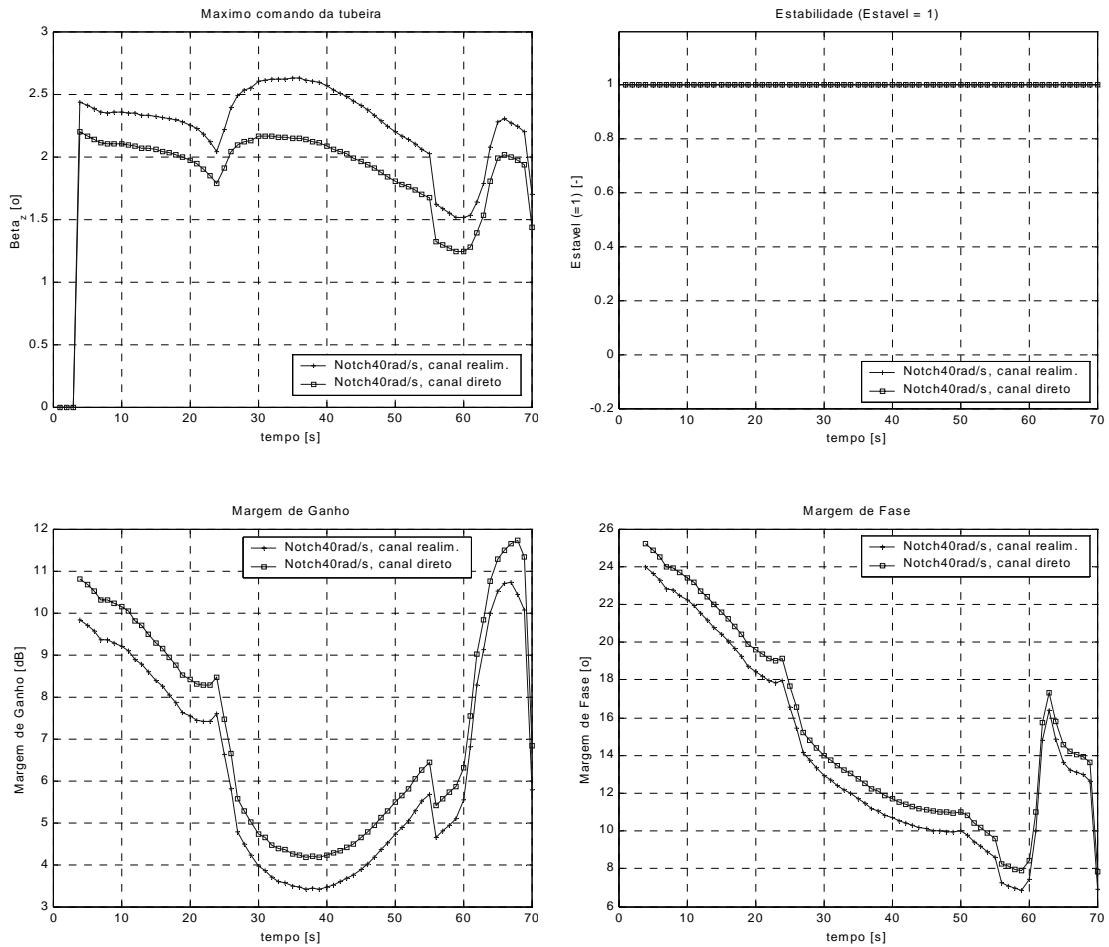


FIGURA 5.40: Outros parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário e margem de fase e ganho, modelo completo com filtro *Notch* a 40 rad/s no canal direto e de realimentação.

A margem de ganho e fase foi maior para o *Notch* no canal direto. A mínima margem de ganho foi de 4,2 dB para *Notch* no canal direto e 3,5 dB para o *Notch* no canal de realimentação, enquanto a margem de fase mínima foi de 8° com a posição no canal direto e em torno de 7° no canal de realimentação.

Desta maneira, o filtro *Notch* poderia permanecer no canal de realimentação pois os resultados da resposta no tempo ao degrau foram melhores nesta situação (apenas uma menor folga da tubeira em relação ao seu batente) e os resultados de margem e ganho não foram muito piores que os obtidos com o *Notch* no canal direto.

Por fim, considerando que o filtro *Notch* poderia permanecer no canal de realimentação mas com sua sintonização à 40 rad/s (que garante a estabilidade), é feita uma comparação entre os ganhos do método LQ e Analítico (FIGURA 5.41).

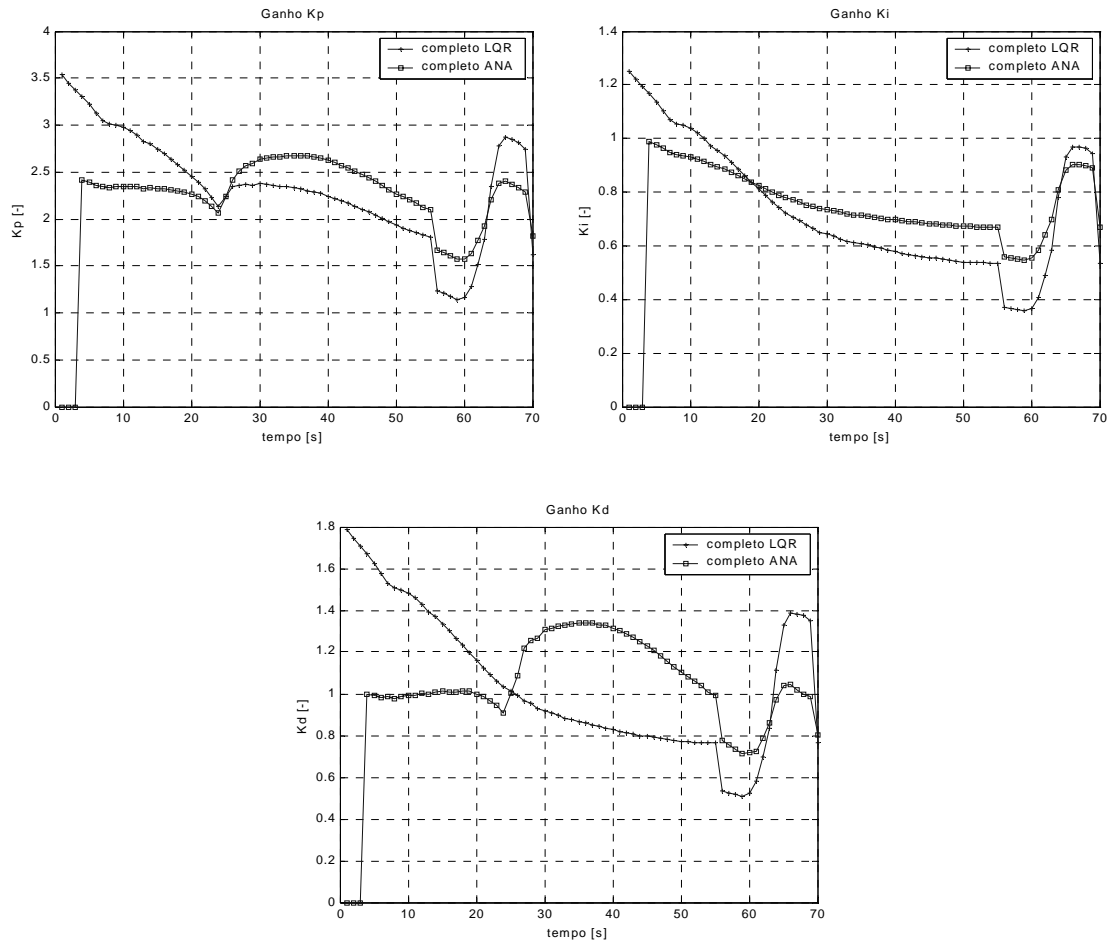


FIGURA 5.41: Comparação dos métodos LQ e Analítico (modelo completo), ganhos do controlador, filtro *Notch* à 40 rad/s no canal de realimentação.

Na FIGURA 5.42 são apresentados os resultados de resposta ao degrau unitário comparando os dois métodos. O sobresinal do método Analítico foi menor que o LQ de aproximadamente 37% para 28%.



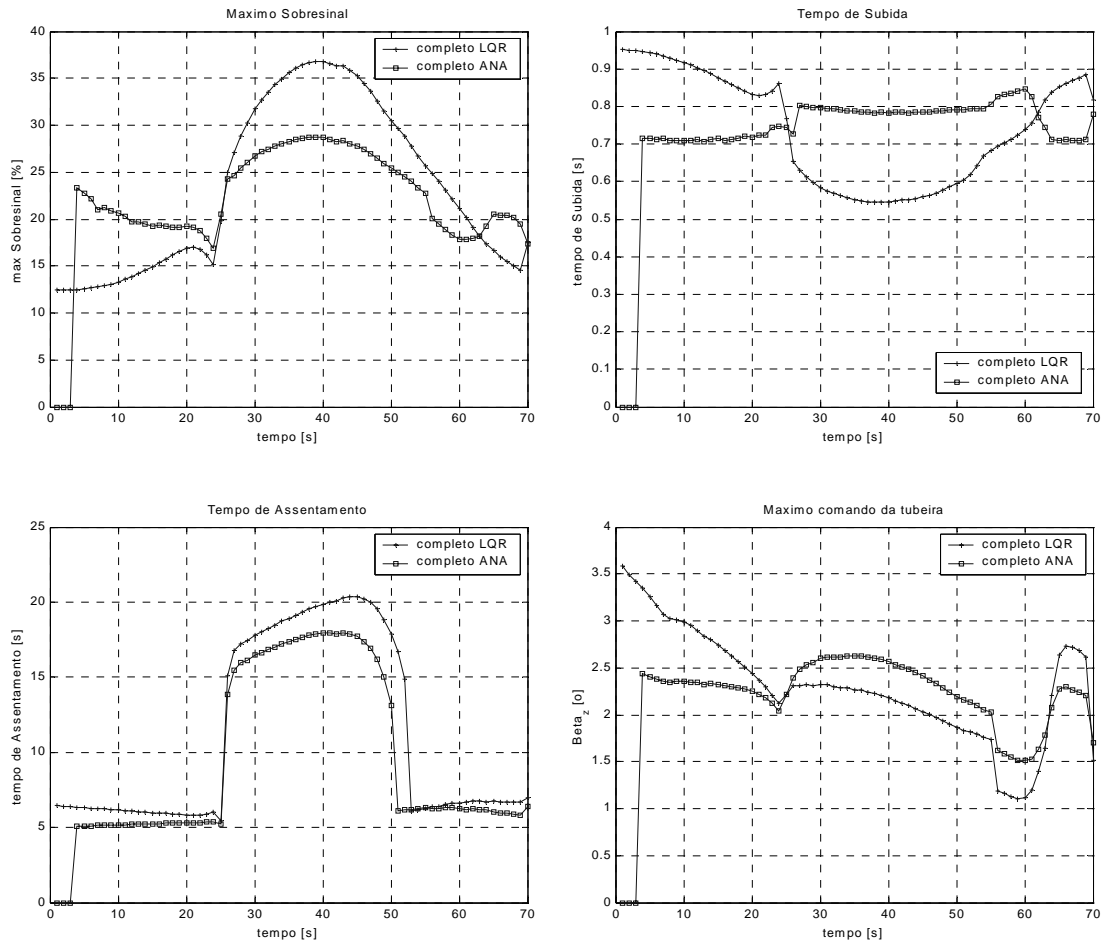


FIGURA 5.42: Comparação dos métodos LQ e Analítico (modelo completo), parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário, filtro *Notch* à 40 rad/s no canal de realimentação.

O tempo de subida se manteve mais constante e próximo ao valor de projeto com os ganhos do método Analítico e seu valor mínimo foi de 0,7 seg. (para o método LQ foi da ordem de 0,55 seg.). No início do vôo os resultados do método LQ foram melhores pois se mantiveram acima de 0,8 seg.

O tempo de assentamento também foi melhor para o método Analítico, ficando sempre abaixo do método LQ. O método Analítico atingiu um máximo em torno de 18 seg. e o método LQ em torno de 21 seg.

Desconsiderando o início do voo, o máximo comando da tubeira foi maior para o método Analítico, mas este se manteve abaixo do valor de batente de 3° ao longo de todo voo.

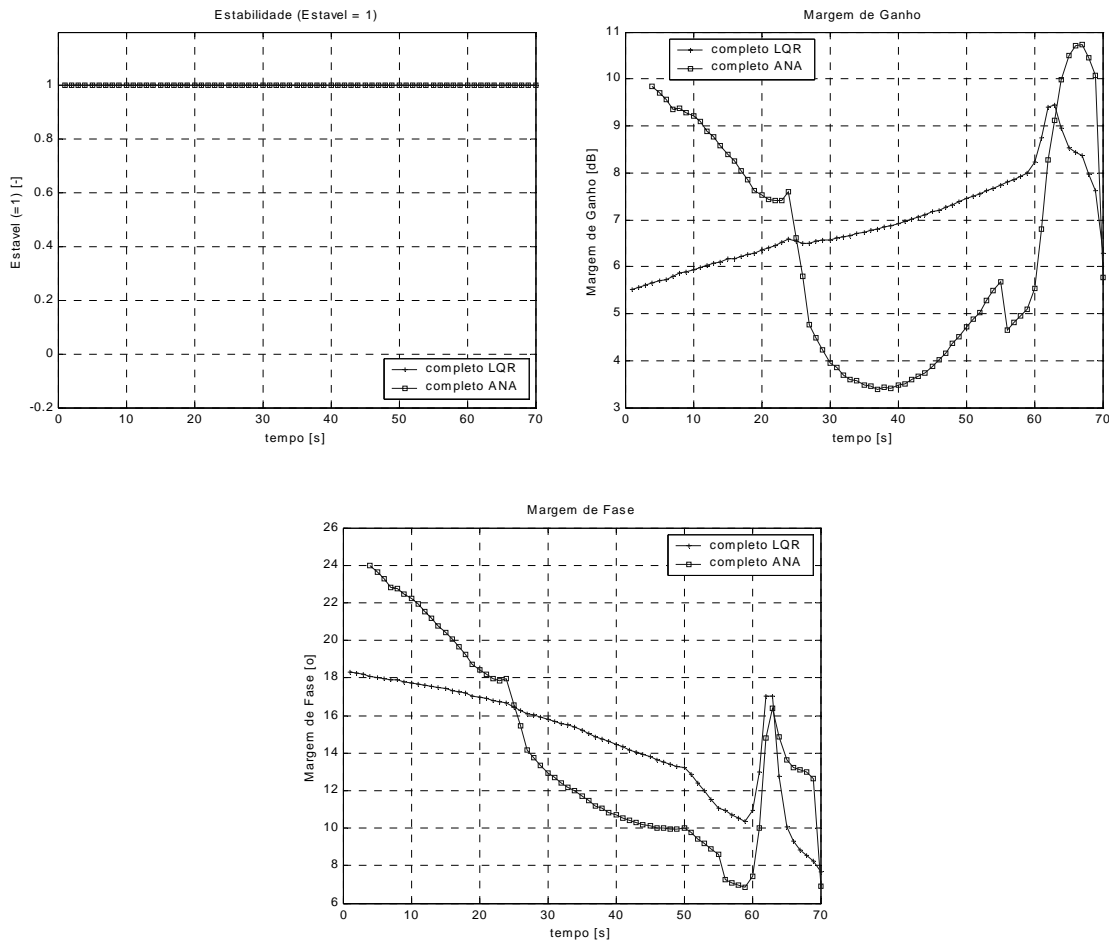


FIGURA 5.43: Comparação dos métodos LQ e Analítico (modelo completo), outros parâmetros, filtro *Notch* à 40 rad/s no canal de realimentação.

Na FIGURA 5.43 são comparados os resultados de margem de fase e ganho para os dois métodos. O método Analítico possui uma margem de ganho e fase maior no início do voo (10 dB e 24°) que o método LQ (5,5 dB e 18°), o que é mais desejável, pois são valores mais próximos do que literatura recomenda (6 dB e 30°). No entanto, estes valores pioram no método Analítico, atingindo valores de 3,5 dB e somente 7°, enquanto que no método LQ, a margem de

ganho aumenta atingindo valores de 9,5 dB e margem de fase cai ligeiramente atingindo valores de  $10^{\circ}$ .

Desta forma, observa-se que a margem de estabilidade no método LQ se mantém mais constante ao longo do vôo, mesmo iniciando com valores menores que o método Analítico.

### 5.2.4 Comparação dos Métodos

Para verificação a validade nesta nova metodologia de cálculo dos ganhos do controlador do VLS, faz-se necessário uma comparação entre o método LQ e o método Analítico.

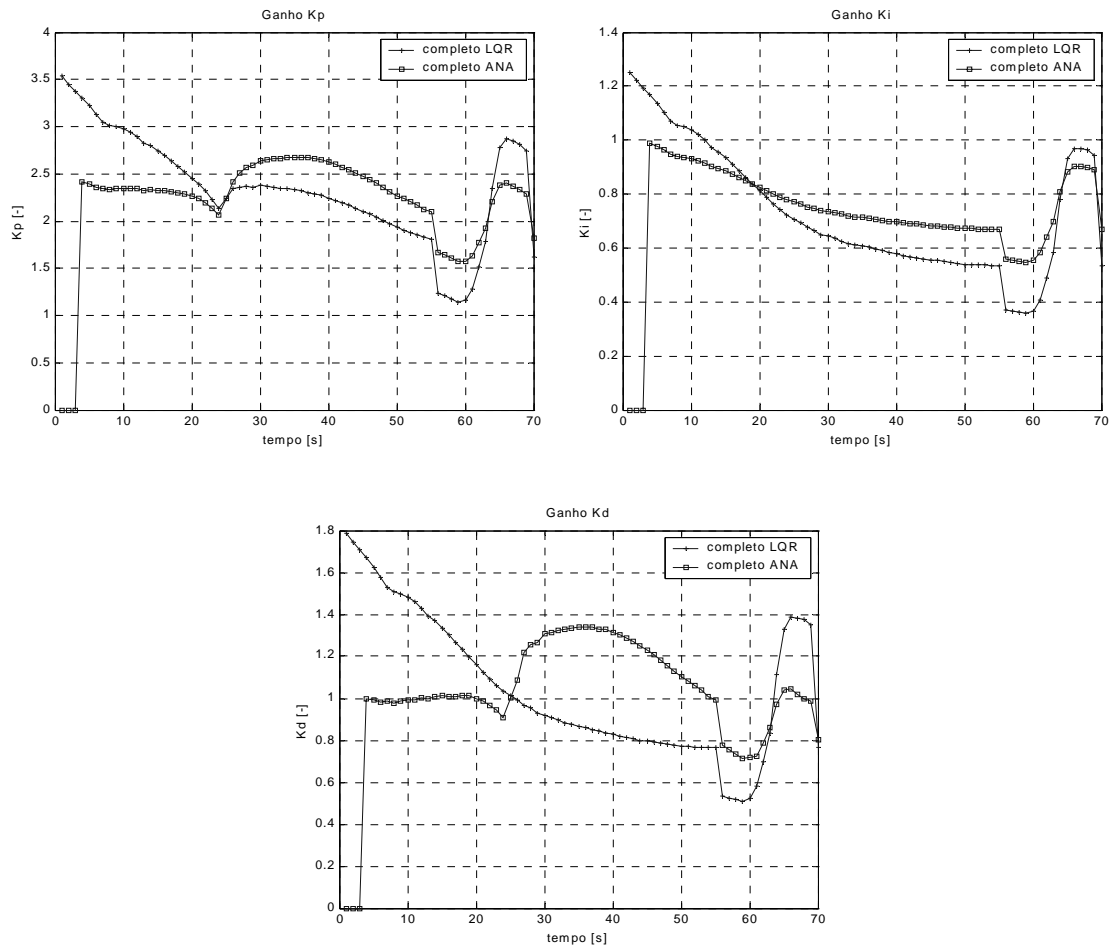


FIGURA 5.44: Comparação dos métodos LQ e Analítico (modelo completo), ganhos do controlador.

Na FIGURA 5.44 são apresentadas os ganhos do controlador para o método LQ e Analítico (abreviado como ANA, na legenda). Os dois métodos possuem grandes diferenças no início do voo, sendo que o método LQ possui valores maiores nos três ganhos nesta fase.

Na FIGURA 5.45, pode-se comparar os parâmetros de resposta ao degrau unitário. Considerando somente o trecho do voo antes da instabilidade (veja FIGURA 5.46a), o método LQ possui um máximo sobresinal maior, o tempo de subida até 25 seg. de voo é melhor para o LQ e depois o Analítico passa a ser mais coerente, o tempo de assentamento não é bom para nenhum dos dois métodos (a não ser até 25 seg. de voo) e o comando da tubeira possui uma folga maior no método Analítico.

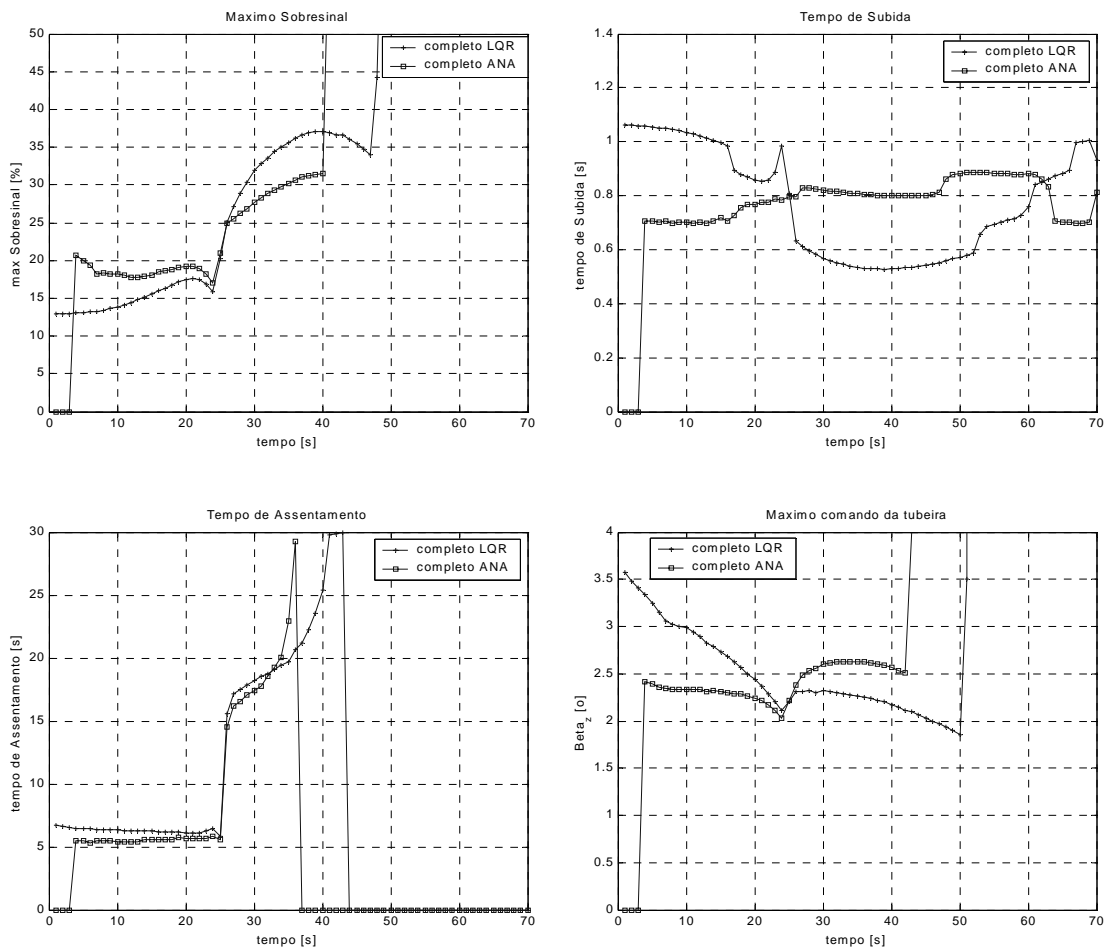


FIGURA 5.45: Comparação dos métodos LQ e Analítico (modelo completo), parâmetros de resposta no tempo ao degrau unitário.

Com relação à robustez nas duas situações comparadas, na FIGURA 5.46 nota-se que o método LQ atinge a instabilidade alguns segundos após o método Analítico, porém possui menor margem de estabilidade (fase e ganho)

do que o método analítico até 25 seg. Após este instante o método LQ possui maior margem de estabilidade até se atingir a instabilidade.

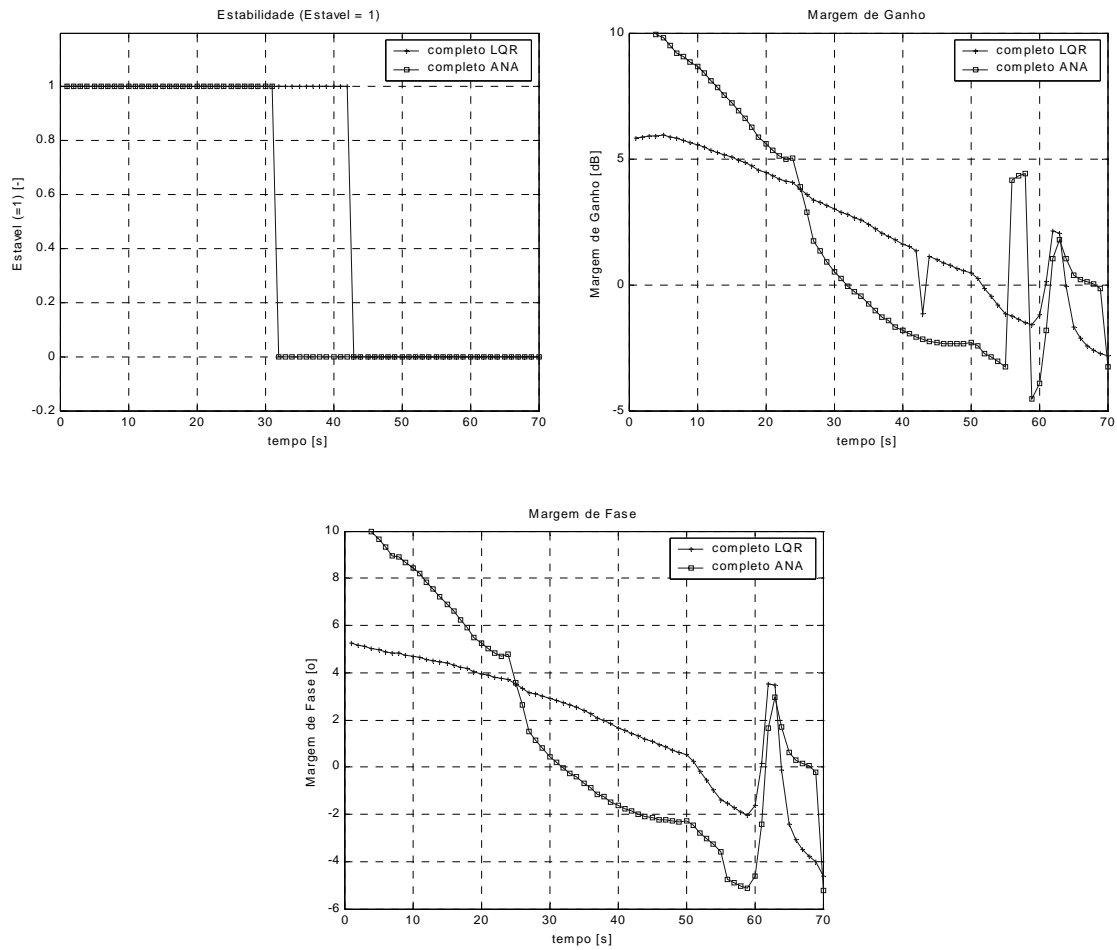


FIGURA 5.46: Comparação dos métodos LQ e Analítico (modelo completo), outros parâmetros.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES

Conforme proposto, foi desenvolvida e implementada uma metodologia analítica para o cálculo dos ganhos do controlador de um lançador de satélites, especificamente o VLS. Este novo método, denominado neste trabalho de Analítico pôde ser comparado ao método já existente baseado em um regulador linear quadrático (denominado método LQ).

A grande dificuldade do método LQ é o fato das matrizes de ponderação Q e R serem escolhidas empiricamente e a relação de cada um dos seus termos com a resposta no tempo ser bastante vaga. De maneira geral, somente os termos da diagonal tem uma relação com os estados adotados, sendo estes termos uma ponderação entre cada um dos estados para gerar o funcional. Os termos cruzados da matriz Q são ainda mais vagos na sua utilização para se atingir os objetivos de projeto e, por causa disto, foram mantidos como zero.

O método Analítico cumpriu a função de estabelecer condições para o cálculo dos ganhos através de requisitos no tempo como o tempo de subida, tempo de assentamento e o máximo erro a rampa unitária. Desta forma, a metodologia implementada obteve uma relação mais física para o cálculo dos ganhos, baseado na resposta no tempo.

Analisando os resultados do modelo completo antes de se atingir a instabilidade, conclui-se que o método Analítico obteve melhores resultados no tempo em comparação ao método LQ. O máximo sobresinal diminui ao longo do vôo, o tempo de subida se manteve mais constante que no LQ (apesar de atingir valores de até 0,7 seg., um pouco abaixo do mínimo estabelecido de 0,8 seg.). O máximo comando da tubeira também diminuiu, atingindo um máximo de 2,7°. Com relação ao tempo de assentamento, os resultados não foram bons pois em diversos instantes de vôo os valores ficaram muito acima de 10 seg. (chegando à 30 seg. ou mais).

Infelizmente não foi possível se encontrar a solução para o problema da instabilidade que acontece quando se testa os ganhos obtidos com o modelo completo, somente se ajustando os ganhos. Como consequência disto, as margens de fase e ganho são bastante comprometidas, ficando bastante a desejar, mesmo no trecho onde o sistema controlado é estável. Desejavam-se valores da ordem de 6 dB e 30° (conforme sugere a literatura), porém os valores encontrados foram 10 dB e 10° para o método na Analítico e 6 dB e 5° para o método LQ, logo após o lançamento e diminuindo cada vez mais até se atingir a instabilidade em 32 seg. (Analítico) e 43 seg. de vôo (LQ). Assim, conclui-se que o método Analítico possui margem de estabilidade maior que o método LQ no início do vôo, porém atinge a instabilidade antes.

Este problema da instabilidade no modelo está sendo estudado, pois existe uma incompatibilidade entre o modelo computacional e a simulação híbrida de laboratório (inclui *hardware-in-the-loop* com computador digital e a tubeira móvel real com suas não-linearidades). Algumas vezes o modelo computacional é estável e a simulação híbrida instável e em outras situações o contrário ocorre. Portanto é um problema que precisa ser estudado mais a fundo.

Com relação ao ciclo limite, o parâmetro importante são os maiores valores de  $K_d$ . O método LQ possui maiores valores no início do vôo (até 25 seg.), mas daí em diante o método Analítico tem maiores valores (inclusive no instante crítico de máximo  $M_\alpha$  em 39 seg. de vôo) e no início do 2° estágio, o LQ é novamente maior. Tanto o instante 39 seg. (máximo  $M_\alpha$ ) como o início do 2° estágio são instantes críticos para o lançador e a verificação de onde o ciclo limite é mais crítico (em amplitude e/ou frequência) é um ponto a se analisar.

O reposicionamento do filtro *Notch* no canal direto obteve piores resultado que as simulações no canal de realimentação (situação atual) contradizendo os resultados dos estudos preliminares. As margens de fase e ganho diminuiram e a instabilidade foi alcançada muito mais cedo durante o vôo. Porém, o aumento da frequência de atenuação de 30 rad/s (atual valor de projeto) para 40 rad/s



acabou com o problema da instabilidade garantindo resultados bons na margem de ganho e razoáveis para margem de fase. A comparação do filtro *Notch* no canal direto e de realimentação à 40 rad/s foi feita e constatou-se que os resultados com este filtro posicionado no canal de realimentação também foram bons.

Portanto o filtro poderia permanecer no canal de realimentação pois apesar dos menores resultados de margem e ganho, a resposta no tempo é melhor (porém com folga do batente na tubeira menor que o caso no canal direto). Estudos futuros podem analisar o filtro variando sua frequência (aumentando ainda mais, ficando entre as frequências dos dois primeiros modos de flexão) e coeficientes de amortecimento do numerador e denominador para que os resultados possam ser ainda mais melhorados.

Assim, de maneira geral, o método Analítico obteve melhores resultados no tempo que o método LQ (comparando antes de se atingir a instabilidade), possui valores de  $K_d$  maiores que o LQ somente durante a fase de máximo  $M_\alpha$  (bom para o ciclo limite). As margens de fase e ganho foram maiores no início, mas atingiu-se a instabilidade antes que o método LQ.

Com a sintonização do filtro *Notch* à 40 rad/s foi possível se comparar o resultado do método Analítico com o método LQ eliminando o problema da instabilidade. Analisando a resposta no tempo, o método Analítico se mostrou melhor que o método LQ, com menor sobressinal, tempo de subida mais próximo do projetado e tempo de assentamento ligeiramente menor. No entanto, em termos de margem de ganho e fase, o método LQ é melhor pois possui valores mais constantes ao longo do vôo, garantindo uma maior robustez. Como o lançador real, possui variações de projeto em relação ao modelo analisado, a questão da robustez é mais importante do que o desempenho no tempo (a não ser que seja proibitivo em termos estruturais) e portanto, conclui-se que o método LQ ainda é mais seguro pois possui maiores margens de estabilidade.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alazard, D.; Imbert, N.; Clement, B.; Apkarian, P. Launcher attitude control: Additional design and optimizations tools. In: International Conference on Launcher Technology, 5., Nov. 2003, Madrid. **Proceedings...** Madrid, 2003.
- Blakelock, H. **Automatic control of aircraft and missiles**. New York: John Wiley and Sons, 1991. p. 62.
- Balas, M.J. Discrete-time stability of continuous-time controller designs of large space structures. **Journal Guidance**, v. 5, n. 5, p. 541-543, Sept.-Oct. 1982.
- Bals, J.; Goh, C.-H.; Grübel, G. Tuning analytical synthesis techniques via multi-objective optimizations form two-feedback-loop control of flexible space structures. In: ESA international conference on GNC, 2., Apr. 1994, Noordwijk. **Proceedings...** structures. In: ESA international conference on GNC, 2., Apr. 1994, Noordwijk: ESA, 1994.
- Bueno, A.M.; Leite Filho, W. C. Parameter identification of actuator nonlinear model based on limit-cycle phenomenon. In: International Congress of Mechanical Engineering (COBEM), 17., Nov. 2003, São Paulo. **Anais...** São Paulo: ABCM, 2003.
- Clement, B.; Duc, G. Flexible arm multi-objective control via Youla parameterization and LMI optimization. In: IFAC ROCOND, 3., 2000, Prague. **Proceedings...** Prague: IFAC, June 2000a.
- Clement, B.; Duc, G. A multi-objective control algorithm: application to a launcher with bending modes. In: IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2000), 8., July 2000. Rio, Grece. **Proceedings...**Rio, Grece: IEEE, 2000b.
- Clement, B.; Duc, D. ; Mauffrey, S. ; Biard, A. Gain Scheduling for an aerospace launcher with bending modes. In: IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems. Glasgow, 2001. **Proceedings...** Glasglow : IFAC, 2001.

- Cornelisse, J.W.; Schöeye, H.F.R.; Wakker, K.F. **Rocket propulsion and Spaceflight Dynamics**. London: Pitman, 1979.
- Dorf, R.; Bishop, R. **Sistemas de controle moderno**. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 1998.
- Greensite, Arthur L. **Analysis and design of space vehicle flight control systems – control theory**. 2. ed. New York: Spartan Books, v. 2, 1970.
- Isakowitz, S.J.; Hopkins Jr., J.P.; Hopkins, J.B., **International reference guide to space launch systems**. 3. ed. Washington DC: AIAA, 1999.
- Kuo, B.C. , **Sistemas de Controle Automático**. 4. ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1985.
- Kuga, H.; Rao, K. **Introdução à Mecânica Orbital**. São José dos Campos: INPE, 1995. ( INPE-5615-PUD/64).
- Mallaco, Lais M. R. **Nomenclatura padronizada para uso em relatórios técnicos e em computador**. São José dos Campos: CTA/IAE, ago. 1987. Relatório Técnico RT 014/EIC-COG/87.
- Malyshev, V.V.; Krasilshikov, M. N.; Bobronnikov, V.T.; Dishel, V.D.; Leite Filho, W.C.; Ribeiro, T.S. **Aerospace Vehicle Control**. São José dos Campos: CTA/IAE, 1996.
- Moreira, Fernando J. O.; Kienitz, K. H. **Anteprojeto de algoritmo de controle do VLS com atuadores do tipo tubeira móvel**. São José dos Campos: CTA/IAE, abr. 1993. Documento 590-000000/B303.
- Murphy, C.H. Symmetric missile dynamic instabilities. **Journal Guidance and Control**, v. 4, n. 5, p. 464-471, Oct. 1981.
- Nasa Clube Brasil. Disponível em:  
<http://br.share.geocities.com/nasaclubebrazil> . Acesso em: 2004.
- Ogata; K. **Modern control engineering**, 3ª edição, Prentice Hall, 1997.

- Ramos, F.O.; Leite Filho, W.C.; Moreira, F.J.O. Gain computation strategy for an attitude control system. In: International Congress of Mechanical Engineering (COBEM), 17., Nov. 2003, São Paulo-SP. **Proceedings...**São Paulo, ABCM, 2003.
- Rohr, C. E.; Melsa, J.; Schultz, D. **Linear Control Systems**. Revised edition. New York: McGraw-Hill, Oct. 1992.
- Santos, Ilmar F. **Dinâmica de sistemas mecânicos – modelagem, simulação, visualização, verificação**. 1. ed. São Paulo: Makron Books, 2001.
- Shapiro, E.Y.; Fredricks, D. A.; Rooney, R.H. Pole placement with output feedback. **Journal Guidance and Control**, v. 4, n. 4, p. 441-442, July-Aug. 1981.
- Wie, B. **Space Vehicle Dynamics and Control**. AIAA Education Series, 1998. 661p.
- Winning, D.J.; Thompson, E.C.; Murray-Smith, D.J. Sensitivity method for online optimizations of a synchronous-generator excitation controller. **Proceedings IEE Part D: Control Theory and Applications**, v.124, n. 7, p. 631-638, July 1977.



## APÊNDICE A

### TABELAS

Neste apêndice são apresentados os dados aerodinâmicos e outros dados considerados para as simulações apresentadas neste trabalho.

TABELA A.1: Dados aerodinâmicos e outros dados do VLS.

<b>t</b>	<b>Zbz</b>	<b>Za</b>	<b>Ma</b>	<b>Mbz</b>	<b>Mq</b>	<b>g</b>	<b>U</b>
s	m/s <sup>2</sup> / rad	m/s <sup>2</sup> / rad	rad/s <sup>2</sup> / rad	rad/s <sup>2</sup> / rad	rad/s <sup>2</sup> /rad/s	m/s <sup>2</sup>	m/s
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	9,8065	0,0000
1,0000	8,8586	0,0043	0,0006	-3,2793	0,0116	9,8065	4,9217
2,0000	9,0705	0,0296	0,0040	-3,3633	0,0111	9,8064	12,8642
3,0000	9,2459	0,0806	0,0109	-3,4343	0,0106	9,8064	21,1678
4,0000	9,4284	0,1611	0,0214	-3,5079	0,0101	9,8063	29,8339
5,0000	9,6869	0,2758	0,0361	-3,6101	0,0096	9,8062	38,9277
6,0000	9,9599	0,4308	0,0556	-3,7178	0,0091	9,8061	48,5452
7,0000	10,2474	0,6328	0,0805	-3,8313	0,0086	9,8059	58,7203
8,0000	10,3782	0,8859	0,1110	-3,8862	0,0079	9,8057	69,3732
9,0000	10,4379	1,1878	0,1465	-3,9140	0,0071	9,8055	80,2407
10,0000	10,5238	1,5399	0,1871	-3,9512	0,0063	9,8052	91,3090
11,0000	10,6842	1,9471	0,2328	-4,0158	0,0056	9,8049	102,6611
12,0000	10,9011	2,4152	0,2842	-4,1016	0,0050	9,8046	114,3763
13,0000	11,1928	2,9481	0,3412	-4,2147	0,0044	9,8043	126,4695
14,0000	11,3708	3,5515	0,4041	-4,2850	0,0038	9,8039	138,9928
15,0000	11,6484	4,2298	0,4731	-4,3918	0,0033	9,8034	151,9611
16,0000	11,9380	4,9941	0,5488	-4,5025	0,0028	9,8030	165,5035
17,0000	12,2663	5,9875	0,6249	-4,6281	0,0024	9,8024	179,6330
18,0000	12,6084	7,1624	0,7018	-4,7581	0,0020	9,8019	194,3666
19,0000	12,9889	8,5414	0,7748	-4,9019	0,0017	9,8013	209,7387
20,0000	13,4066	10,1512	0,8397	-5,0587	0,0014	9,8007	225,7959
21,0000	13,8094	12,0645	0,8655	-5,2094	0,0011	9,8000	242,5161
22,0000	14,2251	14,3144	0,8363	-5,3637	0,0011	9,7993	259,8968
23,0000	14,6555	16,9224	0,7206	-5,5232	0,0010	9,7985	277,8971
24,0000	15,0346	19,8811	0,5255	-5,6624	0,0009	9,7977	296,3718
25,0000	15,4166	23,4036	1,4037	-5,8006	0,0010	9,7968	315,0886
26,0000	15,7662	24,6740	2,3167	-5,9254	0,0011	9,7959	333,8455
27,0000	16,1609	24,9597	2,6742	-6,0656	0,0014	9,7949	352,5560
28,0000	16,4273	29,2548	2,9889	-6,1554	0,0017	9,7939	371,2943
29,0000	16,8691	33,4864	3,2610	-6,3086	0,0021	9,7929	390,0360
30,0000	17,0762	37,3309	3,5546	-6,3714	0,0026	9,7917	409,0975
31,0000	17,3543	39,5049	3,7089	-6,4585	0,0032	9,7906	428,4555
32,0000	17,6521	41,6028	3,8515	-6,5497	0,0038	9,7894	448,1550

<b>t</b>	<b>Zbz</b>	<b>Za</b>	<b>Ma</b>	<b>Mbz</b>	<b>Mq</b>	<b>g</b>	<b>U</b>
s	m/s <sup>2</sup> / rad	m/s <sup>2</sup> / rad	rad/s <sup>2</sup> / rad	rad/s <sup>2</sup> / rad	rad/s <sup>2</sup> /rad/s	m/s <sup>2</sup>	m/s
34,0000	18,1806	45,4433	4,0922	-6,6982	0,0052	9,7868	488,5911
35,0000	18,4434	47,1046	4,1841	-6,7677	0,0060	9,7855	509,2458
36,0000	18,6641	48,5981	4,2592	-6,8185	0,0069	9,7841	530,2845
37,0000	18,9926	49,8532	4,3113	-6,9061	0,0080	9,7826	551,7636
38,0000	19,2122	50,8228	4,3382	-6,9509	0,0090	9,7811	573,6951
39,0000	19,5014	51,5620	4,3459	-7,0175	0,0101	9,7796	596,1324
40,0000	19,8041	52,0612	4,3220	-7,0859	0,0114	9,7780	619,1559
41,0000	20,1302	52,2988	4,2654	-7,1597	0,0127	9,7763	642,7664
42,0000	20,3963	52,2607	4,1887	-7,2083	0,0139	9,7746	667,0001
43,0000	20,7030	52,1634	4,1695	-7,2682	0,0153	9,7728	691,9486
44,0000	21,0404	51,1563	4,0641	-7,3352	0,0167	9,7710	717,6192
45,0000	21,3135	49,9509	3,9392	-7,3770	0,0182	9,7691	744,1065
46,0000	21,5944	48,5838	3,7890	-7,4177	0,0195	9,7671	771,3892
47,0000	21,8830	47,0567	3,6303	-7,4578	0,0208	9,7651	799,5276
48,0000	22,1937	45,3596	3,4544	-7,5020	0,0222	9,7631	828,5915
49,0000	22,5155	43,5109	3,2660	-7,5467	0,0234	9,7609	858,5886
50,0000	22,8485	41,5802	3,0806	-7,5913	0,0246	9,7587	889,5432
51,0000	23,1411	39,7627	2,9312	-7,6193	0,0257	9,7564	921,3804
52,0000	23,4054	37,8482	2,7770	-7,6345	0,0266	9,7541	954,1470
53,0000	23,6243	35,8993	2,5911	-7,6321	0,0275	9,7517	987,7453
54,0000	23,9274	33,8888	2,4011	-7,6541	0,0283	9,7492	1022,1756
55,0000	24,1718	31,8493	2,2248	-7,6542	0,0289	9,7466	1057,4139
56,0000	35,2941	30,1569	2,0710	-11,0303	0,0361	9,7439	1101,4751
57,0000	36,0293	28,4707	1,9235	-11,1596	0,0370	9,7412	1149,4959
58,0000	36,9111	26,8667	1,7698	-11,3268	0,0380	9,7383	1198,9925
59,0000	37,8419	25,6251	1,6019	-11,5037	0,0392	9,7353	1250,1565
60,0000	37,0144	24,2520	1,4356	-11,1452	0,0379	9,7322	1301,8582
61,0000	33,7417	22,5415	1,2665	-10,0743	0,0320	9,7290	1348,3699
62,0000	28,2712	20,3447	1,0965	-8,3862	0,0221	9,7257	1382,2437
63,0000	23,7348	17,8700	0,9338	-7,0138	0,0152	9,7224	1402,8220
64,0000	17,9018	15,4505	0,7878	-5,2745	0,0108	9,7190	1415,2112
65,0000	14,9883	13,2318	0,6611	-4,4107	0,0082	9,7157	1422,3326
66,0000	14,3759	11,3055	0,5542	-4,2340	0,0079	9,7123	1427,8456
67,0000	14,3658	9,6646	0,4647	-4,2362	0,0080	9,7089	1433,3224
68,0000	14,4338	8,2182	0,3875	-4,2623	0,0081	9,7055	1438,9933
69,0000	14,6775	6,9940	0,3232	-4,3405	0,0084	9,7022	1445,0335
70,0000	20,3537	2,6643	0,7923	-7,6503	0,0189	9,6988	1453,1666



TABELA A.2: Parâmetros de flexão que variam ao longo do tempo do VLS.

<b>t</b>	<b>wf1</b>	<b>Kf1</b>	<b>wf2</b>	<b>Kf2</b>
s	rad/s	-	rad/s	-
0,0000	28,7142	0,0000	84,0062	0,0000
1,0000	28,7888	-8,1518	84,0883	6,4466
2,0000	28,8635	-8,3584	84,1705	6,6068
3,0000	28,9382	-8,5117	84,2527	6,7248
4,0000	29,0129	-8,6745	84,3348	6,8502
5,0000	29,0876	-8,9011	84,4170	7,0258
6,0000	29,1623	-9,1654	84,4991	7,2311
7,0000	29,2370	-9,3808	84,5813	7,3978
8,0000	29,3117	-9,4456	84,6634	7,4456
9,0000	29,3864	-9,4963	84,7456	7,4822
10,0000	29,4610	-9,5520	84,8278	7,5229
11,0000	29,5357	-9,6615	84,9099	7,6059
12,0000	29,6104	-9,8360	84,9921	7,7400
13,0000	29,6851	-10,0798	85,0742	7,9285
14,0000	29,7598	-10,2022	85,1564	8,0215
15,0000	29,8345	-10,3971	85,2386	8,1714
16,0000	29,9092	-10,6759	85,3207	8,3872
17,0000	29,9871	-10,9130	85,4074	8,5698
18,0000	30,0805	-11,1682	85,5157	8,7647
19,0000	30,1739	-11,5343	85,6240	9,0465
20,0000	30,2672	-11,8287	85,7323	9,2718
21,0000	30,3606	-12,1200	85,8406	9,4945
22,0000	30,4539	-12,4804	85,9489	9,7711
23,0000	30,5473	-12,7872	86,0572	10,0057
24,0000	30,6407	-13,0488	86,1655	10,2046
25,0000	30,7340	-13,3025	86,2738	10,3972
26,0000	30,8274	-13,5157	86,3821	10,5580
27,0000	30,9207	-13,8309	86,4904	10,7984
28,0000	31,0141	-13,8900	86,5987	10,8389
29,0000	31,1075	-14,1616	86,7070	11,0450
30,0000	31,2008	-14,2337	86,8153	11,0955
31,0000	31,2942	-14,3792	86,9236	11,2032
32,0000	31,3875	-14,5371	87,0319	11,3206
33,0000	31,4809	-14,6541	87,1402	11,4061
34,0000	31,5847	-14,7063	87,2629	11,4398
35,0000	31,7080	-14,8642	87,4123	11,5531
36,0000	31,8312	-14,9728	87,5616	11,6282
37,0000	31,9544	-15,2104	87,7110	11,8034
38,0000	32,0777	-15,2229	87,8604	11,8039
39,0000	32,2009	-15,3682	88,0098	11,9075

<b>t</b>	<b>wf1</b>	<b>Kf1</b>	<b>wf2</b>	<b>Kf2</b>
s	rad/s	-	rad/s	-
40,0000	32,3241	-15,5466	88,1592	12,0368
41,0000	32,4474	-15,6358	88,3085	12,0970
42,0000	32,5706	-15,7587	88,4579	12,1833
43,0000	32,6938	-15,8606	88,6073	12,2534
44,0000	32,8171	-15,9968	88,7567	12,3500
45,0000	32,9403	-16,0525	88,9060	12,3846
46,0000	33,0636	-16,1982	89,0554	12,4887
47,0000	33,1868	-16,2288	89,2048	12,5040
48,0000	33,3100	-16,3700	89,3542	12,6047
49,0000	33,4333	-16,4177	89,5036	12,6333
50,0000	33,5565	-16,4335	89,6529	12,6376
51,0000	33,7535	-16,5990	89,9134	12,7487
52,0000	34,0174	-16,8327	90,2744	12,9049
53,0000	34,2812	-16,9575	90,6355	12,9780
54,0000	34,5450	-17,1679	90,9965	13,1171
55,0000	34,8088	-17,3414	91,3575	13,2283
56,0000	34,9621	-24,8777	91,6283	18,8987
57,0000	35,1153	-25,0955	91,8990	18,9867
58,0000	35,2686	-25,4306	92,1697	19,1632
59,0000	35,4218	-25,6990	92,4405	19,2892
60,0000	35,5751	-23,3805	92,7112	17,4809
61,0000	35,7283	-17,8414	92,9819	13,2885
62,0000	35,8816	-11,5219	93,2527	8,5494
63,0000	36,0348	-9,5556	93,5234	7,0641
64,0000	36,1881	-9,1253	93,7942	6,7213
65,0000	36,3413	-9,0867	94,0649	6,6689
66,0000	36,4946	-9,1112	94,3356	6,6631
67,0000	36,6478	-9,3094	94,6064	6,7844
68,0000	36,8011	-9,4234	94,8772	6,8438
69,0000	36,9544	-9,6169	95,1481	6,9606
70,0000	38,9313	-14,4606	96,7050	11,2395